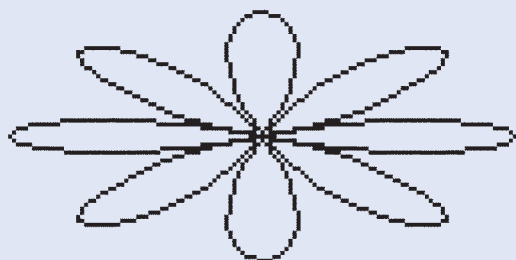


OPPLÆRINGSHEFTE

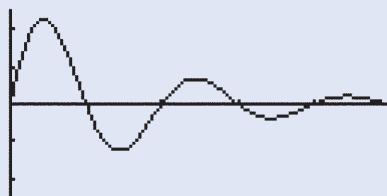
for videregående skole



Tor Andersen

Årgang 1 - 2010

Vg 1, Vg 2 og Vg 3



Om dette heftet:

Opplæringsheftet for Casio fra fx-9860 GII og tilsvarende modeller er skrevet for elever i videregående skole. Heftet gir tips om hvordan du kan gå fram for å løse aktuelle oppgaver i matematikk på de ulike trinn i videregående skole. Opplæringsheftet erstatter ikke brukerveiledningen, men er ment å være et nyttig supplement som skal gjøre det lettere å bruke lommeregneren i timene.

Forfatter:

Tor Andersen er ansatt som universitetslektor ved Matematikksenteret/NTNU. Han har skrevet lærebøker i matematikk og utgitt litteratur for brukere av Casio lommeregnere og programvare. Tor Andersen er redaktør for Casionytt.



FORORD

Dette opplæringsheftet kan brukes til flere CASIO lommeregnermodeller. Men tasttrykkene som er beskrevet og skjermbildene som blir vist, er hentet fra *fx-9860 GII*. Ofte er det bare små justeringer som skal til før framgangsmåtene passer til andre tilsvarende modeller.

Opplæringsheftet erstatter ikke brukerveiledningen, men er ment å være et nyttig supplement som skal gjøre det lettere å bruke lommeregneren i realfagstimene i den videregående skolen. Eksempelene og oppgavene er basert på læreplanene i matematikk for alle trinn i videregående skole.

I de første kapitlene er tastetrykk og framgangsmåte detaljert beskrevet. Forhåpentligvis er de detaljerte beskrivelsene til nytte for brukere som ikke har erfaring med lommeregneren fra før. Fra kapitel 4 og utover blir beskrivelsene mindre detaljerte. Dersom det oppstår tvil om framgangsmåten, ber vi leseren om å studere brukerveiledningen.

Dette opplæringsheftet tar ikke mål av seg til å erstatte lærebøkene i matematikk. I heftet går vi nokså rett løs på eksempler og oppgaver uten å ha redegjort for teorien først. Derfor bør opplæringsheftet brukes parallelt med læreboka. Siden dette opplæringsheftet ikke inneholder en egen oppgavesamling, oppfordrer vi leseren til også å løse oppgaver fra lærebøkene.

Brukerveiledningen for *fx-9860 GII* er per dato på 413 sider. Det betyr at svært mange funksjoner og kommandoer ikke blir omtalt i dette opplæringsheftet. Vi har prioritert de mest brukte funksjonene og kommandoene som er nødvendig for å kunne oppleve lommeregneren som et nyttig hjelpemiddel i videregående skole.

Jeg takker Casio Scandinavia AS ved Kjell Skajaa for godt samarbeid og hjelp med produksjonen av dette opplæringsheftet. Samtidig takker jeg tidligere elev Eva Skovlund for utprøving og kritiske tilbakemeldinger.

Trondheim - mars 2010

Universitetslektor Tor Andersen
tor.andersen@matematikksenteret.no

Innhold

	side
1 Oppstart	5
1.1 Hovedmenyen	6
1.2 Minnet	6
1.3 Innstillinger	6
1.4 SET UP	7
2 Grunnleggende regning	8
2.1 Addisjon og subtraksjon	8
2.2 Renske skjermen	9
2.3 Multiplikasjon	9
2.4 Divisjon	9
2.5 Regne videre med forrige svar	10
2.6 Brøk	10
2.7 Blandet tall	11
2.8 Brudden brøk	11
2.9 Potenser	12
2.10 Tall på standardform	13
2.11 Kvadratrot og n-te rot	13
2.12 Regneregler og formler	14
2.13 Logaritmer	15
3 Likninger	19
3.1 Enkle likninger	19
3.2 Andregradslikninger	21
3.3 Andregradslikninger med kompleks løsning	23
3.4 Tredjegradslikninger	24
3.5 Likningssett med flere ukjente	25
3.6 Logaritmelikninger	25
3.7 Eksponentiallikninger	26
3.8 Arbeid med en formel	27
4 Funksjoner og grafer	28
4.1 Legge inn funksjoner og tegne grafer	28
4.2 Tabell	31
4.3 Punkt på grafen, nullpunkt, topp- og bunnpunkt	33
4.4 Skjæringspunkt mellom grafer	37
4.5 Grafisk løsning av likninger	38
4.6 Derivert og andrederivert	41
4.7 Integral - areal	41
4.8 Integral - volum av omdreiningslegeme	45
4.9 Integral - overflate av omdreiningslegeme	47
4.10 Integral - buelengde	48
4.11 Parameterframstilling	48

4.12	Polarkoordinater	50
4.13	Regresjon. Kurvetilpasning	54
4.14	Grafisk løsning av ulikheter	58
4.15	Absoluttfunksjonen	61
5	Trigonometri	63
5.1	Grader og radianer	63
5.2	Beregne sinus, cosinus og tangens	64
5.3	Beregne vinkel	66
5.4	Trigonometriske funksjoner og grafer	68
5.5	Trigonometriske likninger	73
6	Kombinatorikk, sannsynlighet og statistikk	76
6.1	Ordnet utvalg med tilbakelegging	76
6.2	Ordnet utvalg uten tilbakelegging	77
6.3	Uordnet utvalg uten tilbakelegging	78
6.4	Binomisk forsøk	78
6.5	Binomisk fordeling	82
6.6	Hypergeometrisk fordeling	83
6.7	Normalfordeling	84
6.8	Kurvediagram	87
6.9	Sortering av statistisk materiale	88
6.10	Gjennomsnitt, median, kvartiler, typetall og variasjonsbredde	90
6.11	Varians og standardavvik	92
6.12	Forventning, varians og standardavvik for en stokastisk variabel X	95
6.13	Konfidensintervall	96
6.14	Hypotesetesting	98
7	Tallfølger og rekker.	100
7.1	Tallfølger og rekker. Rekursjon	100
7.2	Aritmetiske tallfølger og rekker	100
7.3	Geometriske tallfølger og rekker	102
7.4	Konvergente geometriske rekker	104
7.5	Vilkårlige tallfølger og rekker	105
7.6	Fibonaccifølgen i regneark	106
8	Tall	109
8.1	Store tall. Sum og fakultet	109
8.2	Tallfunksjonene GCD, LCD, MOD og MOD-E	111
8.3	Komplekse tall	114
8.4	Binære og heksadesimale tall	117
9	Omgjøring av enheter	119
9.1	Lengde, areal og volum	119
9.2	Omgjøringsformel for Fahrenheit og Celsius	121
9.3	Tidsenheter	122
9.4	Kraft, trykk, energi og effekt	123

10	Kjeglesnitt	124
10.1	Sirkel	124
10.2	Parabel	125
10.3	Ellipse	127
10.4	Hyperbel	128

1. Oppstart

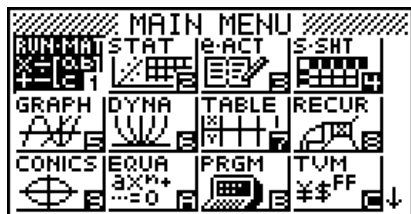
1.1 Hovedmenyen

Slå på lommeregneren ved å trykke på AC^{/ON}-knappen.



Du slår av lommeregneren ved å trykke på  etterfulgt av .

Når du slår på lommeregneren, kommer dette skjermbildet opp.



Bruk piltastene til å flytte markøren rundt i hovedmenyen



På skjermbildet ovenfor er RUN-MAT markert. Trykk EXE og vi går inn i RUN-MAT.

Da får vi denne skjermen.



Trykk på MENU-knappen for å gå tilbake til hovedmenyen.



I dette opplæringsheftet skal vi behandle følgende områder fra hovedmenyen.



Regning



Statistikk og sannsynlighetsregning



Regneark



Funksjoner og grafer.



Tabeller



Tallfølger og rekker



Kjeglensnitt



Likninger og likningssett



Minne



System

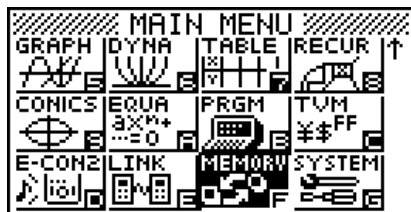
For e-ACT, DYNA, PRGM, TVM, E-CON2 og LINK viser vi foreløpig til manualen.

1.2 Minnet



Viser deg hvor mye som er lagret og hvor mye som er ledig i de ulike områdene i lommeregnerens minne. Kan også brukes til å fjerne det du har lagret i minnet. Vær forsiktig så du ikke fjerner noe som du ikke ønsker å kvitte deg med.

Bruk piltastene til å navigere til MEMORY. Trykk EXE og vi får dette skjermbildet.

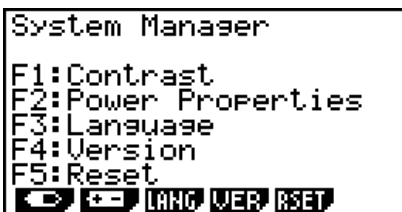
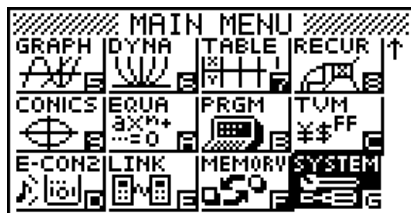


Vi viser til brukerveiledningen

1.3 Innstillinger

Naviger med piltastene til SYSTEM og trykk EXE.

Ved å trykke F1 kan du justere kontrasten. Du kan også velge språk. Ikke norsk.

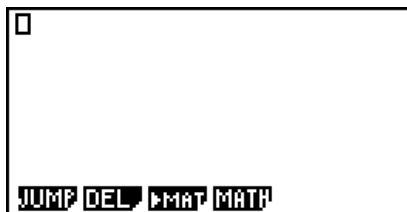
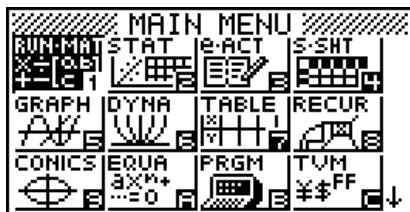


Vær forsiktig når du bruker RSET-tasten. For øvrig viser vi til brukerveiledningen.

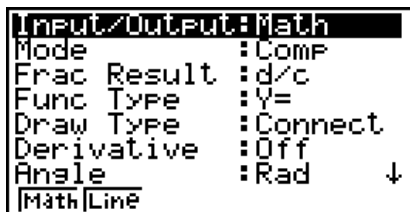
1.4 SET UP

Velg RUN-MAT i hovedmenyen.

Da får du opp følgende skjermbilde.



Trykk SHIFT etterfulgt av MENU. Da kommer vi inn i SET UP.



I dette opplæringsheftet vil vi ofte gå inn i SET UP. Legg merke til at vi har valgt Math for Input/Output. Alle skjermbildene i dette opplæringsheftet blir skrevet ut i denne Input/Output – innstillingen. Brøker, potenser, kvadratrøtter og matematiske uttrykk kommer da fram med vanlig lærebokstandard. Vi kaller formatet for ”natural display”.

De øvrige innstillingene blir omtalt i kapitlene etter hvert som vi velger nye innstillinger i SET UP.

Bruk piltast opp eller ned for å flytte markøren i SET UP- menyen. Trykk EXE for å bekrefte en innstilling. Vi trykker EXIT for å gå ut av SET UP.

2. Grunnleggende regning

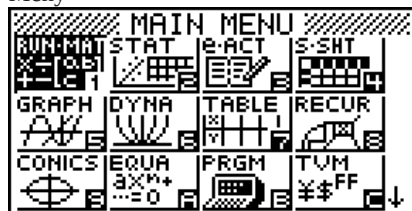
Setup i eksemplene er følgende

2.1 Addisjon og subtraksjon



Trekk sammen: $23+14-9=$

Meny



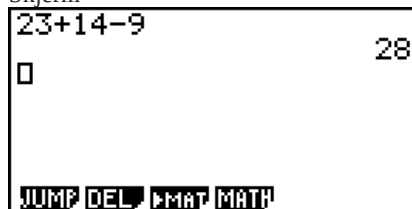
Trykk **EXE**

Skjerm



Trykk **2** **3** **+** **1** **4** **-** **9** **EXE**

Skjerm

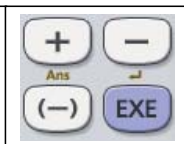


Svaret kommer fram etter at vi har trykt på **EXE**.

Merknad

Operasjonstegnet for subtraksjon er **-**.

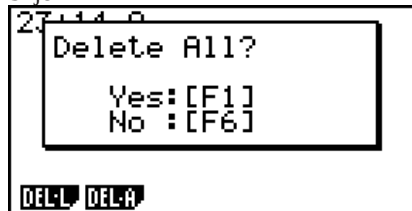
Negativt fortegn til et tall er **(-)**.



2.2 Renske skjermen

Trykk **[F2]** **[F1]**

Skjerm



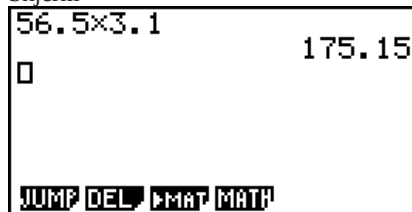
2.3 Multiplikasjon



Regn ut: $56,5 \cdot 3,1 =$

Trykk **[5]** **[6]** **[.]** **[5]** **[X]** **[3]** **[.]** **[1]** **[EXE]**

Skjerm



Merknad: Desimalkomma er punktum.

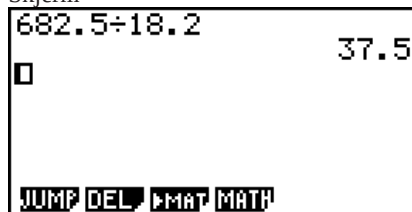
2.4 Divisjon



Regn ut: $682,5 : 18,2 =$

Trykk **[6]** **[8]** **[2]** **[.]** **[5]** **[÷]** **[1]** **[8]** **[.]** **[2]** **[EXE]**

Skjerm

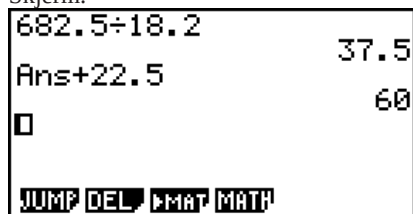


2.5 Regne videre med forrige svar

Forrige svar var 37,5. Adderer 22,5 til dette svaret.

Trykk **[+]** **[2]** **[2]** **[.]** **[5]** **[EXE]**

Skjerm.



Merk: Ans kommer automatisk opp på skjermen.

2.6 Brøk



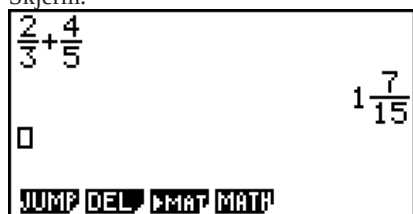
Trekk sammen: $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} =$

Trykk

[2] **[a/b]** **[3]** **[>]** **[+]** **[4]** **[a/b]** **[5]** **[>]** **[EXE]**

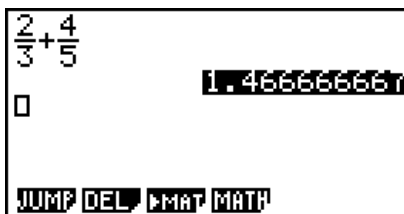
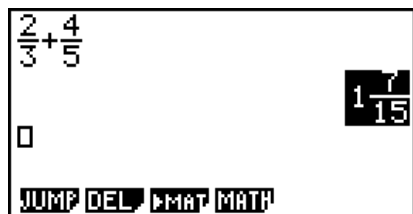


Skjerm.



Skriv svaret som desimaltall.

Trykk **[<=>]** **[F<=>D]**



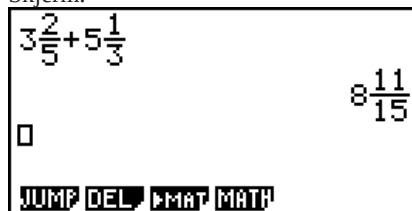
2.7 Blandet tall



Trekk sammen: $3\frac{2}{5} + 5\frac{1}{3} =$

Trykk **3** **SHIFT** **$\frac{\Box}{\Box}$** **2** **▼** **5** **▶** **+** **5** **SHIFT** **$\frac{\Box}{\Box}$** **1** **▼** **3** **EXE**

Skjerm.



Merk forskjellen på blandet tall og multiplikasjon mellom helt tall og brøk.



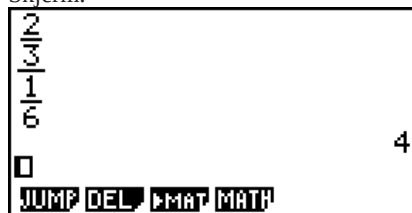
2.8 Brudden brøk



Regn ut: $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{6}} =$

Trykk **$\frac{\Box}{\Box}$** **$\frac{\Box}{\Box}$** **▼** **▼** **$\frac{\Box}{\Box}$** **▲** **▲** **2** **▼** **3** **▼** **1** **▼** **6** **EXE**

Skjerm.



2.9 Potenser



Regn ut: $3^2 \cdot 3^3 =$

Trykk **3** **^** **2** **▶** **×** **3** **^** **3** **EXE**

Skjerm.

$$3^2 \times 3^3 = 243$$

JUMP DEL ▶MATH MATH

Merk at.

$$3^5 = 243$$

JUMP DEL ▶MATH MATH

Merk at.

$$3^0 = 1$$

JUMP DEL ▶MATH MATH

Merk at.

$$3^{-1} = \frac{1}{3}$$

JUMP DEL ▶MATH MATH



Regn ut: $\frac{5^4 \cdot 2^2}{2^3 \cdot 5^2} =$

Trykk

$\frac{a^b}{c^d}$ **5** **^** **4** **▶** **×** **2** **^** **2** **▼** **2** **^** **3** **▶** **×** **5** **^** **2** **EXE**

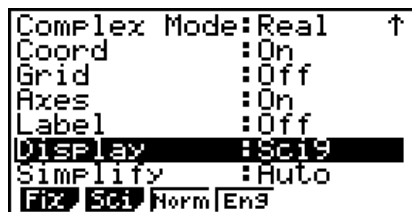
Skjerm.

$$\frac{5^4 \times 2^2}{2^3 \times 5^2} = 12\frac{1}{2}$$

JUMP DEL ▶MATH MATH

2.10 Tall på standardform

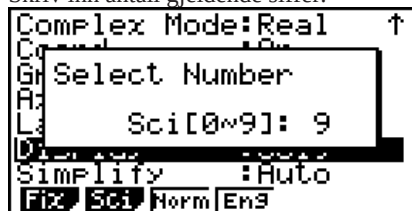
Lommeregneren skriver et tall på standardform dersom SET UP for Display er satt til Sci.



Flytt opp og ned med piltastene.

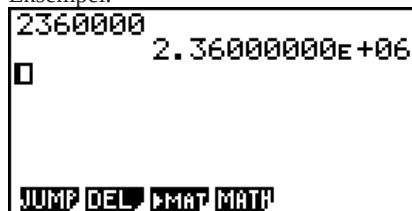
Velg Sci ved å trykke F2.

Skriv inn antall gjeldende siffer.

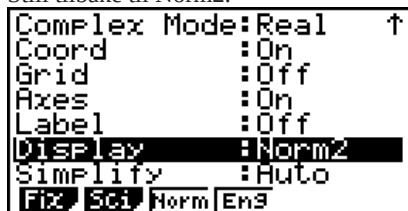


Trykk Exe etterfulgt av Exit.

Eksempel.



Still tilbake til Norm2.



2.11 Kvadratrot og n-te rot



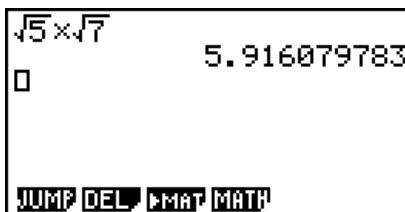
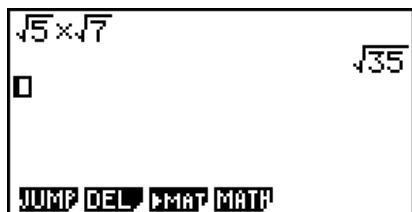
Regn ut: $\sqrt{5} \cdot \sqrt{7} =$

Trykk **SHIFT** **x²** **5** **▶** **×** **SHIFT** **x²** **7** **EXE**

Skjerm.

◀ **F=D** gir.

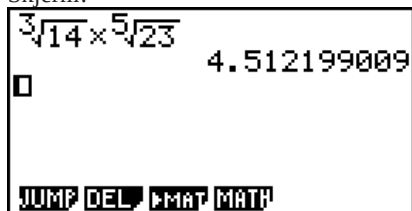




Regn ut: $\sqrt[3]{14} \cdot \sqrt[5]{23} =$

Trykk **SHIFT** **^** **3** **▶** **1** **4** **▶** **×** **SHIFT** **^** **5** **▶** **2** **3** **EXE**

Skjerm.



Merk at.

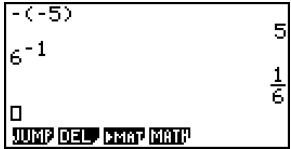


Merk at.



2.12 Regneregler og formler

$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$ $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$	$a+b=b+a$ $a \cdot b=b \cdot a$ $(a+b)+c=a+(b+c)$ $(a \cdot b) \cdot c=a \cdot (b \cdot c)$ $a \cdot (b+c)=a \cdot b+a \cdot c$ $-(a-b)=-a+b$ $-(-a)=a$	$a^n \cdot a^m=a^{n+m}$ $a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ $(a^n)^m=a^{n \cdot m}$ $(a \cdot b)^n=a^n \cdot b^n$ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
$a^0=1$ $a^{-m}=\frac{1}{a^m}$	$\sqrt{xy}=\sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$ $\sqrt{\frac{x}{y}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$	

$(\sqrt[q]{a})^p = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p$ $= a^{\frac{1}{q} \cdot p} = a^{\frac{p}{q}}$	$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$ $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$ $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$	Eksempel 
--	--	--

Bruk lommeregner til å verifisere reglene og formlene.

2.13 Logaritmer

Logaritme med grunntall 10 Briggske logaritme	$10^{\lg x} = x \Leftrightarrow \lg 10^x = x$	$x > 0$
Logaritmelikning	$\lg x = c \Leftrightarrow x = 10^c$	
Logaritmereglene: a og b er <u>positive tall</u> . Reglene gjelder for alle logaritmesystemer.	1) $\lg(a \cdot b) = \lg a + \lg b$ 2) $\lg\left(\frac{a}{b}\right) = \lg a - \lg b$ 3) $\lg a^x = x \cdot \lg a$	Merk $\lg 3^2 = 2 \cdot \lg 3$ $(\lg 3)^2 = \lg 3 \cdot \lg 3$

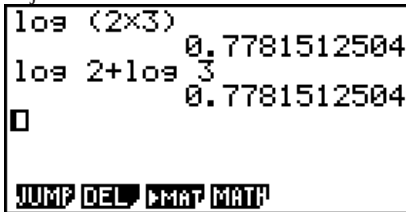


Verifiser de tre logaritmereglene. Sett for eksempel $a = 2$, $b = 3$ og $x = 4$.



Trykk **log** **(** **2** **×** **3** **)** **EXE** **log** **2** **+** **log** **3** **EXE**

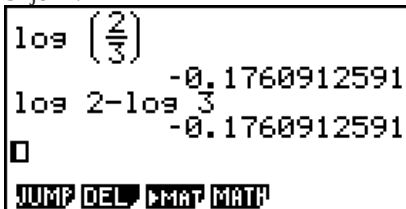
Skjerm.



Formelen $\lg(a \cdot b) = \lg a + \lg b$ er verifisert.

Trykk **log** **(** **2** **÷** **3** **)** **EXE** **log** **2** **-** **log** **3** **EXE**

Skjerm.



Formelen $\lg\left(\frac{a}{b}\right) = \lg a - \lg b$ er verifisert.

Trykk **log** **2** **^** **4** **EXE** **4** **×** **log** **2** **EXE**

Skjerm.

```
log 2^4      1.204119983
4×log 2      1.204119983
□
JUMP DEL ▶MAT MATH
```

Merk forskjellen.

```
(log 2)^4    0.00821181372
log (2^4)    1.204119983
```

Formelen $\lg a^x = x \cdot \lg a$ er verifisert.



Verifiser at $e^{\ln x} = x \Leftrightarrow \ln e^x = x$. Sett for eksempel $x = 5$.

Trykk **SHIFT** **ln** **ln** **5** **EXE** **ln** **SHIFT** **ln** **5** **EXE**

Skjerm.

```
e^ln 5      5
ln e^5      5
□
JUMP DEL ▶MAT MATH
```

Merk at.

```
ln e^1      1
□
DEL DEL
```

Merk at

```
log 1      0
log 10     1
log 100    2
□
JUMP DEL ▶MAT MATH
```

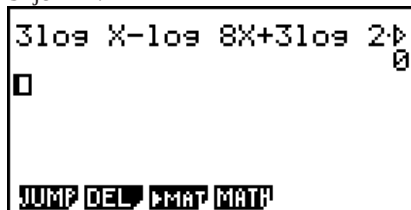
Hva blir $\log 1000$?



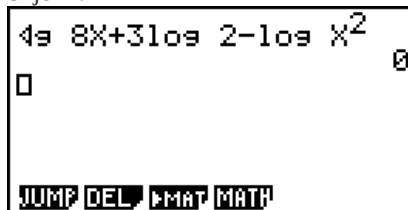
Skriv så enkelt som mulig: $3\lg x - \lg 8x + 3\lg 2 - \lg x^2$

Trykk **3** **log** **X,θ,T** **-** **log** **8** **X,θ,T** **+** **3** **log** **2** **-** **log** **X,θ,T** **x^2** **EXE**

Skjerm 1.



Skjerm 2.

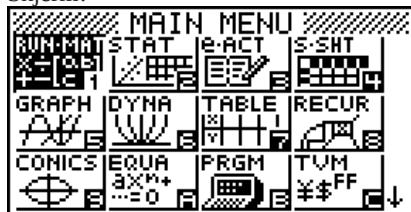


Prøv og forklar uten lommeregner hvorfor svaret blir lik null.

Dersom vi skal arbeide med logaritmer med annet grunntall enn 10 eller naturlige logaritmer med grunntall e, må vi bruke **logab**.

Hvor finner vi **logab**?

Skjerm.



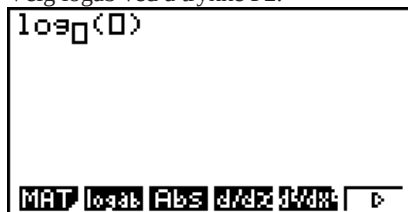
Trykk EXE.



Velg MATH ved å trykke F4.

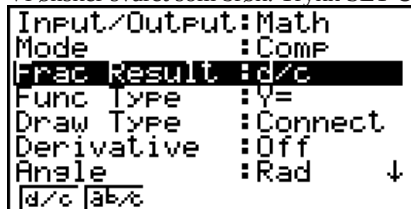


Velg logab ved å trykke F2.



Regn ut $\log_8 32$

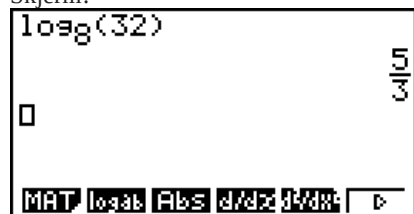
Vi ønsker svaret som brøk. Trykk SET UP og still **Frac Result** slik.



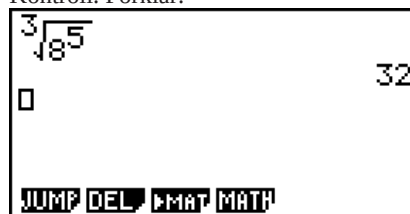
Trykk deretter EXIT.

Trykk **F4** **F2** **8** **▶** **3** **2** **EXE** **▲** **F↔D** **▼**

Skjerm.



Kontroll. Forklar.



3. Likninger

Lommeregneren kan løse likninger og likningssett på forskjellige måter. I dette kapitlet vil vi bruke kommandoene

Solve(
SolveN(
Equation Solv
Equation Poly
Equation Siml

3.1 Enkle likninger



Løs likningen: $3x - (x - 3) = 4x + 5$

Vi velger å hente kommandoen Solve(fra CATALOG



Skjerm.

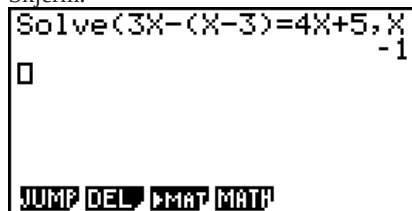


Trykk **EXE**

Trykk deretter

3 **X,θ,T** **-** **(** **X,θ,T** **-** **3** **)** **SHIFT** **.** **4** **X,θ,T** **+** **5** **,** **X,θ,T** **EXE**

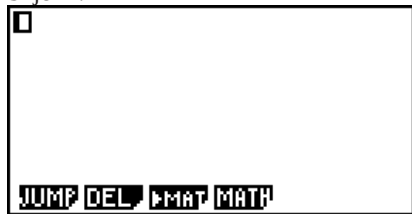
Skjerm.



Løs likningen $\frac{x-3}{2} + \frac{2}{3} = \frac{2x}{3} - \frac{x}{4}$

Denne gangen velger vi å hente kommandoen Solve(ved hjelp av OPTN-knappen.

Skjerm.



Trykk OPTN



Skjerm.



Trykk CALC



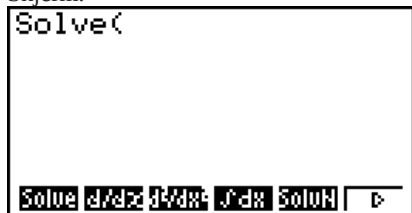
Skjerm.



Trykk Solve



Skjerm.



Trykk deretter



Solve $\left(\frac{x-3}{2} + \frac{2}{3} = \frac{2x}{3} - \frac{x}{4}, x\right)$
 10

JUMP DEL MAT MATH

Trykk deretter $\boxed{\chi, \theta, T} \boxed{x^2} \boxed{-} \boxed{5} \boxed{\chi, \theta, T} \boxed{-} \boxed{6} \boxed{)} \boxed{\text{EXE}}$

WARNING!
More solutions
may exist.
Press: [EXIT]

SolveN($X^2-5X-6=0$)
(-1,6)
□

Solve d/dx ∫dx ∫dx SolveN □

SolveN(X^2-5X-6) (-1,6)

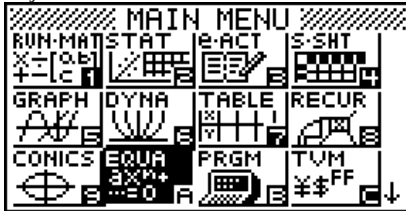
CASIO fx-9860GII
OPPLÆRINGSHEFTE
tor.andersen@matematikkssenteret.no

Vi velger å løse likningen ved hjelp av EQUA. Gå tilbake til MENU.



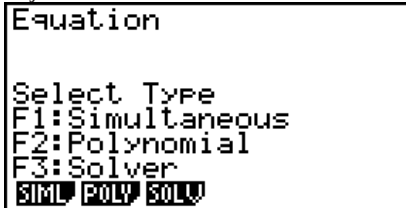
Naviger med piltastene til EQUA i hovedmenyen.

Skjerm.



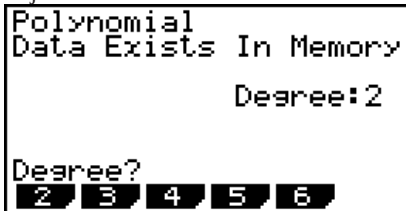
Trykk EXE.

Skjerm.



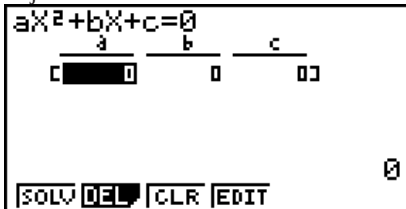
Velg POLY ved å trykke F2.

Skjerm.



Velg 2.grad ved å trykke F1.

Skjerm.



Skriv inn koeffisientene i likningen $3x^2 - 10,5x - 6 = 0$ ved å trykke

3 **EXE** **(-)** **1** **0** **.** **5** **EXE** **(-)** **6** **EXE**

Skjerm.

$$aX^2 + bX + c = 0$$

$$\frac{a}{1} \quad \frac{b}{-10.5} \quad \frac{c}{-6}$$

-6

SOLV DEL CLR EDIT

Trykk EXE og vi får fram løsningen.

Skjerm.

$$aX^2 + bX + c = 0$$

$$X1[4] \quad X2[-0.5]$$

4

REPT

Desimal som brøk.

$$aX^2 + bX + c = 0$$

$$X1[4] \quad X2[-0.5]$$

$-\frac{1}{2}$

REPT

3.3 Andregradslikninger med kompleks løsning



Løs andregradslikningen: $-2x^2 + 3x - 5 = 0$

Velg EQUA i hovedmenyen, deretter POLY og Degree 2.

Legg inn koeffisientene i likningen ved å trykke $(-)$ 2 EXE 3 EXE $(-)$ 5 EXE

Skjerm.

$$aX^2 + bX + c = 0$$

$$\frac{a}{-2} \quad \frac{b}{3} \quad \frac{c}{-5}$$

-5

SOLV DEL CLR EDIT

Trykk SOLV. Vi får denne skjermen.

No Real Roots
Press:[EXIT]

-5

SOLV DEL CLR EDIT

Vi må endre Complex Mode i SET UP til.

Input/Output: Math
Frac Result : ab/c
Func Type : Y=
Angle : Rad
Complex Mode: a+bi
Display : Norm2

REPT

EXIT og SOLV gir da.

$$aX^2 + bX + c = 0$$

$$X1[0.75+1.3919i] \quad X2[0.75-1.3919i]$$

$\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{31}}{4}i$

REPT

Andregradslikningen har kompleks løsning. Merk at

$$i^2 = -1$$

3.4 Tredjegradslikninger

Lommeregneren kan løse polynomlikninger helt opp til sjette grad. Vi løser her en tredjegradslikning ved hjelp av EQUA og POLY.



Løs tredjegradslikningen: $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$

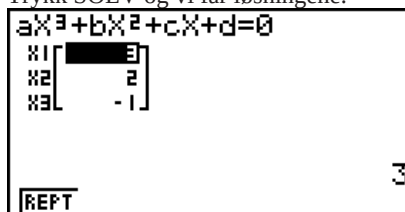
Velg EQUA, POLY og Degree 3

Legg inn koeffisientene ved å trykke **1** **EXE** **(-)** **4** **EXE** **1** **EXE** **6** **EXE**

Skjerm.



Trykk SOLV og vi får løsningene.



Det kan hende at vi må ordne likningen først slik at den kommer på ordnet form. Høyre side må være lik 0.

En tredjegradslikning kan for eksempel ha en reell rot og to komplekse røtter. Se nedenfor.

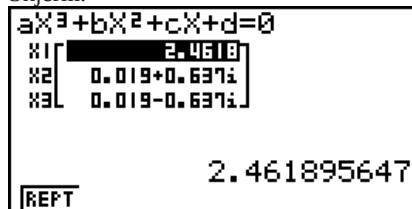


Løs tredjegradslikningen: $-2x^3 + 5x^2 - x + 2 = 0$

Velg EQUA, POLY og Degree 3

Legg inn koeffisientene ved å trykke **(-)** **2** **EXE** **5** **EXE** **(-)** **1** **EXE** **2** **EXE**

Skjerm.



Her ser vi altså en reell og to komplekse løsninger.

3.5 Likningssett med flere ukjent

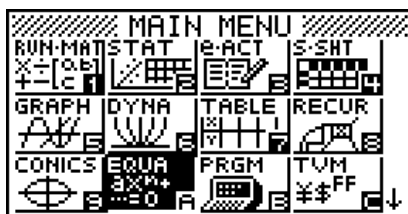


Løs likningssettet:

$$2x - y + z = 8$$

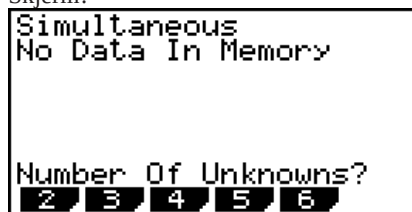
$$x + 2y - z = -5$$

$$x + 5y - 2z = -15$$

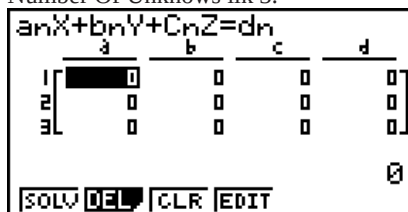


Velg EQUA, SIML

Skjerm.



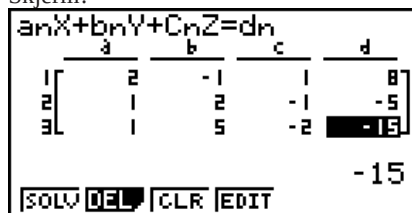
Number Of Unknowns lik 3.



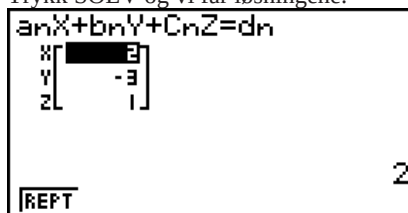
Legg inn koeffisientene ved å trykke



Skjerm.



Trykk SOLV og vi får løsningene.



Gå tilbake ved å trykke EXIT eller direkte til hovedmenyen ved å trykke på MENU-knappen.

3.6 Logaritmelikninger

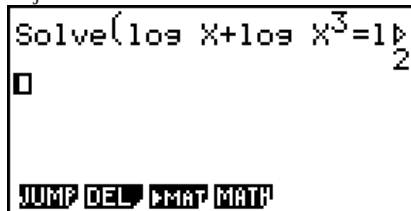


Løs logaritmelikningen: $\lg x + \lg x^3 = \lg 16$

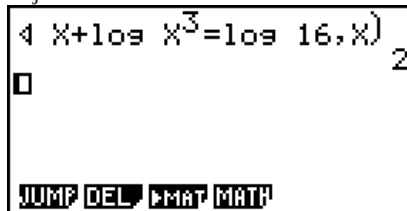
Trykk



Skjerm 1.



Skjerm 2.



Merk at vi må utelukke $x \leq 0$ når vi løser logaritmelikninger.

3.7 Eksponentiallikninger

Eksponentiallikning	$a^x = b \Leftrightarrow x = \frac{\lg b}{\lg a}$ $a > 0$ og $b > 0$	Merk $a^n = a^m \Rightarrow n = m$ $10^x = a \Leftrightarrow x = \lg a$
---------------------	---	---

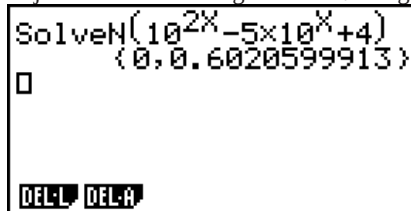


Løs likningen: $10^{2x} - 5 \cdot 10^x + 4 = 0$

Trykk



Skjerm. Merk at likningen har to løsninger.



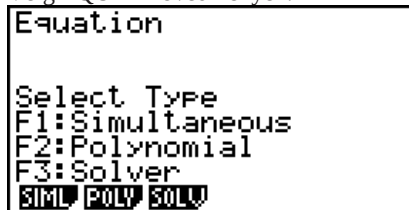
Merk at vi ikke behøver å skrive $= 0$

3.8 Arbeid med en formel

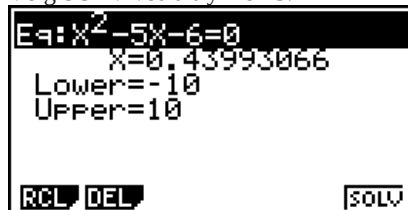


Regn ut radius i en kjele med volum $V = 200 \text{ cm}^3$ og høyde $h = 30 \text{ cm}$.

Velg EQUA i hovedmenyen.

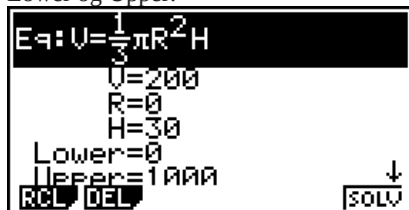


Velg SOLV ved å trykke F3.

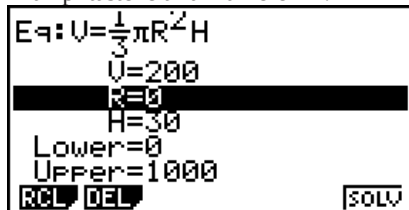


Formelen for volumet av en kjele er $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

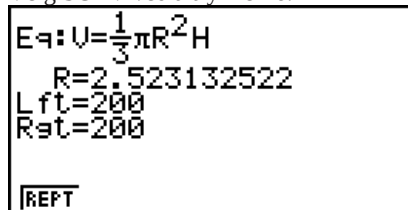
Skriv inn formelen og verdiene for V og h . Lommeregneren vil søke etter løsningen mellom Lower og Upper.



Bruk piltastene til å markere R=.



Velg SOLV ved å trykke F6.



Radius i kjele er 2,52 cm.

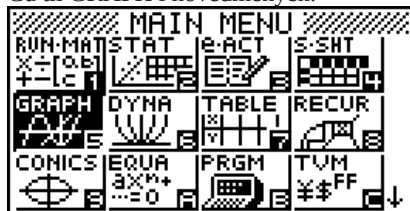
4. Funksjoner og grafer

4.1 Legge inn funksjoner og tegne grafer



Legg inn funksjonen f gitt ved $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ og tegn grafen.

Gå til GRAPH i hovedmenyen.



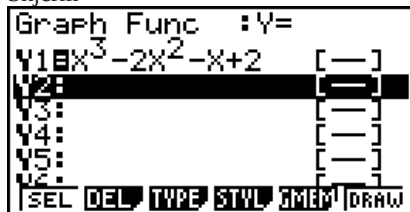
Trykk Exe. Da får vi denne skjermen.



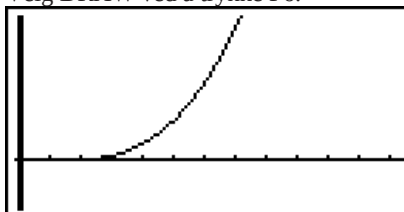
Legg inn funksjonen ved å trykke



Skjerm



Velg DRAW ved å trykke F6.

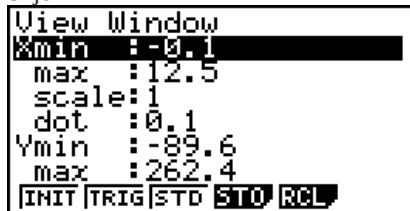


Det er ikke sikkert at din graf ser ut slik. Kanskje du ikke ser en graf i hele tatt. Det betyr at vi må justere visningsvinduet. Det gjør vi slik.

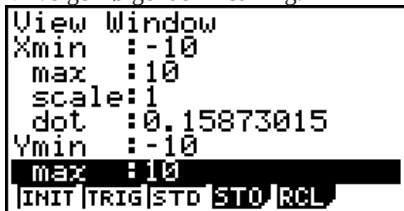


Trykk **EXIT** **SHIFT** **F3**

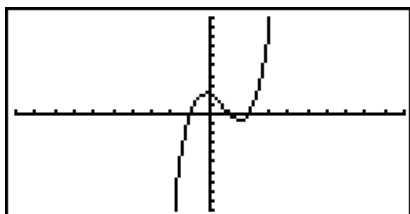
Skjerm



Vi velger følgende innstilling.



Trykk EXIT og velg deretter DRAW.

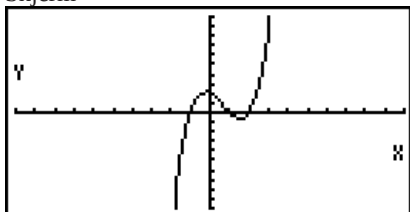


Bruk SET UP til for eksempel å sette navn på aksene. Trykk Exit for å gå tilbake.

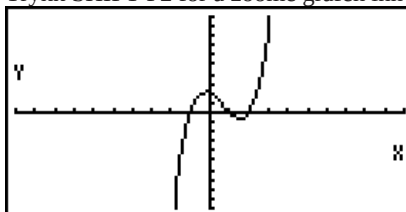
Angle	:Rad	↑
Complex Mode	:Real	
Coord	:On	
Grid	:Off	
Axes	:On	
Label	:On	
Display	:Norm1	
	On Off	

I SET UP kan du også velge Grid On eller Coord Off.

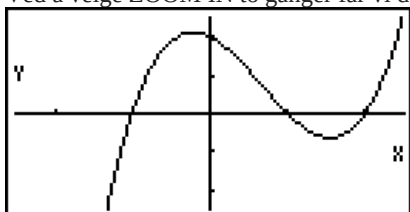
Skjerm



Trykk SHIFT F2 for å zoome grafen inn eller ut

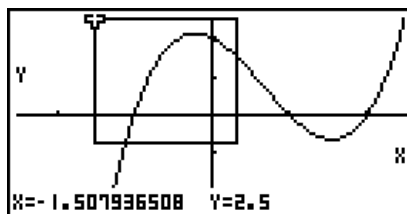
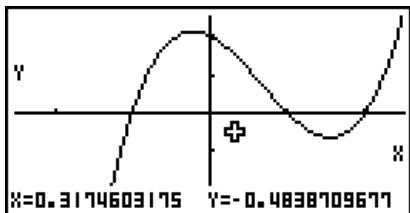


Ved å velge ZOOM IN to ganger får vi dette bildet

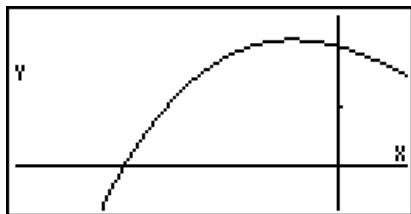


Trykk EXE mellom hver gang.

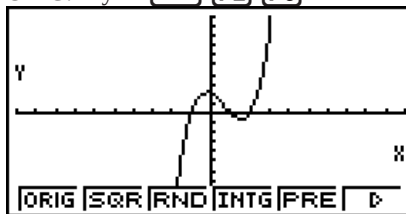
Velg BOX ved å trykke F1. Ved hjelp av BOX kan vi vise et utsnitt av grafen. Flytt markøren til et ønsket startpunkt. Bekreft med EXE. Bruk piltastene til å avgrense området.



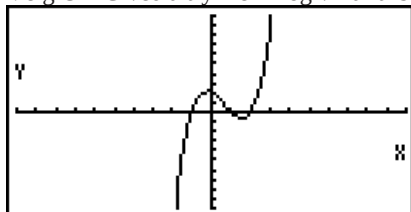
Trykk EXE og vi får se utsnittet



Du får tilbake det opprinnelige bildet ved å velge ORIG. Trykk **SHIFT** **F2** **F6**



Velg ORIG ved å trykke F1 og vi får tilbake det opprinnelige bildet.

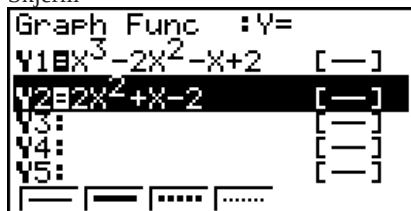


Tegn grafen til g gitt ved $g(x) = 2x^2 + x - 2$ i samme koordinatsystem.

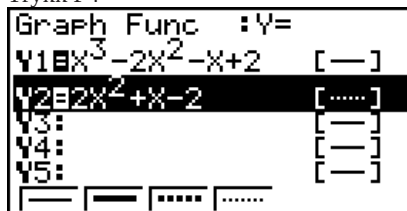
For lettere å skille de to grafene kan vi velge en annen linjestil for grafen til g .

Velg GRAPH i hovedmenyen. Legg inn funksjonsuttrykket bak Y2. Velg STYL ved å trykke F4.

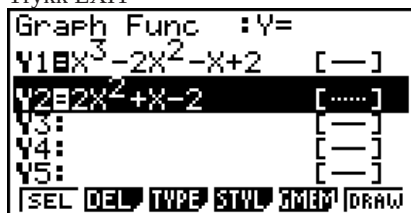
Skjerm



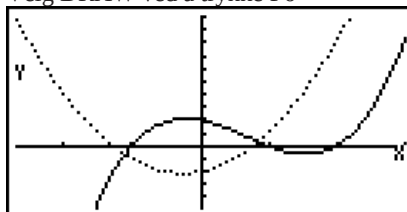
Trykk F4



Trykk EXIT

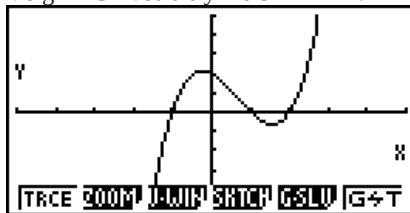


Velg DRAW ved å trykke F6

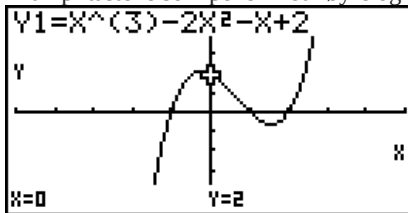


Merknad: Begge funksjonene må være selected (valgt) før begge grafene blir tegnet. SEL (selected) finner du på F1-knappen. En funksjon er selected dersom likhetstegnet er svartsladdet.

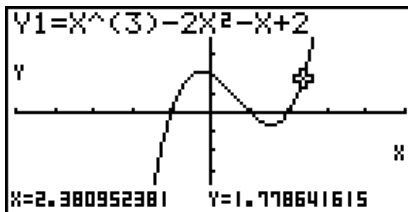
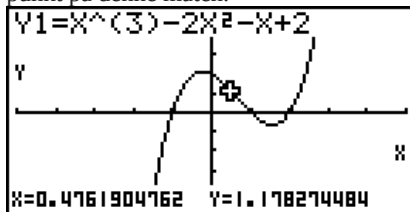
Velg TRCE ved å trykke SHIFT F1.



Bruk piltastene som peker mot høyre og venstre.



Ved å flytte markøren kan vi lese av sammenhørende verdier for x og y. Vi kan finne bestemte punkt på denne måten.



4.2 Tabell

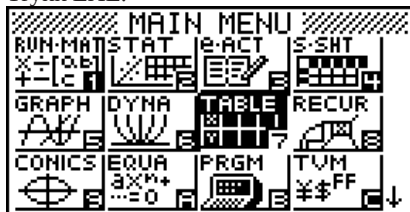
Dersom vi skal tegne en graf for hånd, bør vi bruke en tabell som viser sammenhørende x-verdier og y-verdier. En slik tabell kan vi skaffe oss ved hjelp av lommeregneren.



Lag en tabell for sammenhørende x-verdier og y-verdier for $y = x^3 - 2x^2 - x + 2$.

Naviger til TABLE i hovedmenyen.

Trykk EXE.



Skriv inn funksjonsuttrykket.



Gå inn i SET UP og still Derivative til Off.

Trykk Exit for å gå ut av SET UP

Velg TABL ved å trykke F6.

```

Input/Output:Math
Variable      :Rangse
Graph Func    :On
Dual Screen   :Off
Frac Result   :d/c
Simul Graph   :Off
Derivative    :Off
On | Off

```

X	Y1
1	0
2	0
3	8
4	30

1

FORM DEL ROW EDIT G-CON G-PLT

Det er ikke sikkert at tabellen som du får fram, ser likedan ut. Det avhenger av hvilken **Table Setting** som gjelder på lommeregneren.

Trykk EXIT.

```

Table Func :Y=
Y1: X^3-2X^2-X+2 [-]
Y2: [-]
Y3: [-]
Y4: [-]
Y5: [-]
Y6: [-]
SEL DEL TYPE STYL SET TABL

```

Velg SET ved å trykke F5.

```

Table Settings
X
Start: 1
End : 5
Step : 1

```

Endre Start, End og Step. Trykk EXE for å bekrefte valg.

```

Table Settings
X
Start: -10
End : 10
Step : 0.5

```

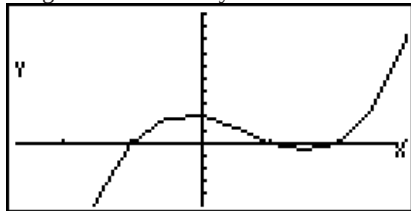
X	Y1
-10	-1188
-9.5	-1026
-9	-880
-8.5	-748.1

-10

FORM DEL ROW EDIT G-CON G-PLT

Øv på bruken av FORM, DEL, ROW og EDIT.

Velg G-CON ved å trykke F5. Altså fra tabell til graf. Trykk EXIT for å gå tilbake.



Velg G-PLT ved å trykke F6. Altså fra tabell til plottede punkter.



4.3 Punkt på grafen, nullpunkt, topp- og bunnpunkt



a) Legg inn funksjonen f gitt ved $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ og tegn grafen.



b) Bestem $f(2,5)$



c) Bestem x når $f(x) = -12$



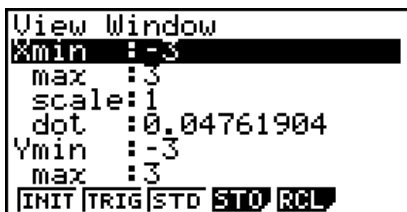
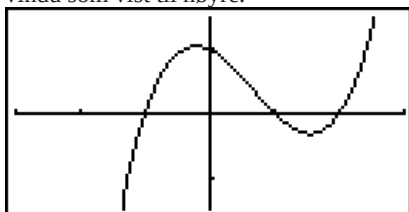
d) Bestem eventuelle nullpunkter på grafen til f .



e) Bestem eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til f .

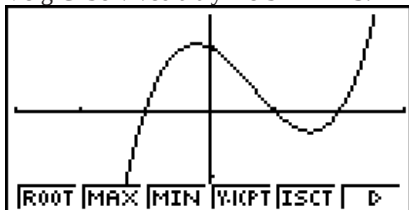
a)

Viser til avsnitt 4.1 og arbeider videre med grafen på følgende skjerm. Bruk gjerne samme vindu som vist til høyre.

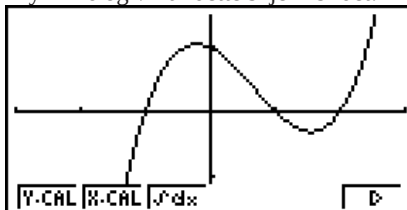


b)

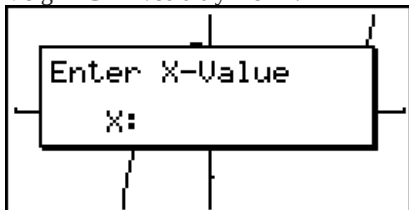
Velg G-Solv ved å trykke SHIFT F5.



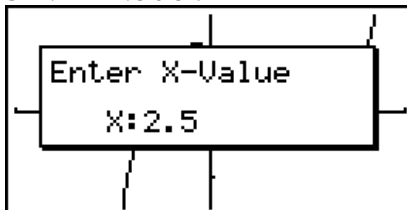
Trykk F6 og vi får dette skjermbildet.



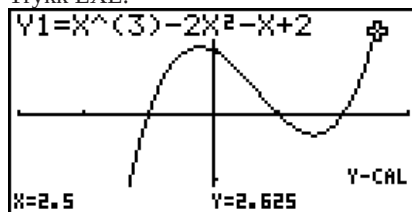
Velg Y-CAL ved å trykke F1.



Skriv inn x-verdien.



Trykk EXE.

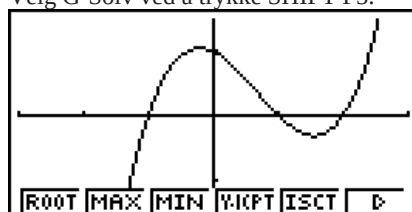


Svar: $f(2,5) = 2,625$

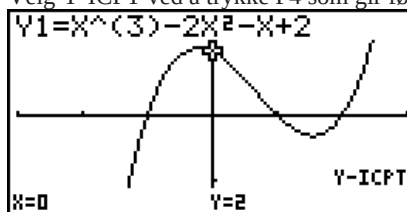
Kommentar:

Vi kan selvfølgelig bestemme skjæringspunktet mellom grafen og y-aksen ved å bruke Y-CAL. Men istedenfor å sette $x = 0$, velger vi å benytte Y-ICPT.

Velg G-Solv ved å trykke SHIFT F5.



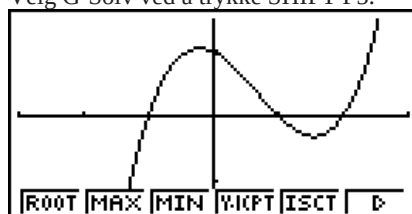
Velg Y-ICPT ved å trykke F4 som gir følgende.



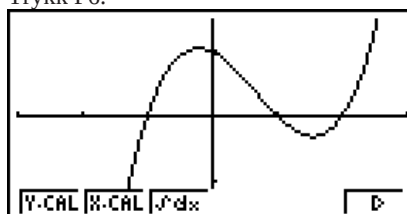
Skjæringspunktet på y-aksen er altså $(0, 2)$.

c)

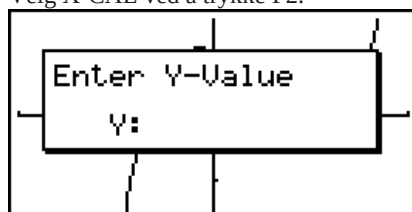
Velg G-Solv ved å trykke SHIFT F5.



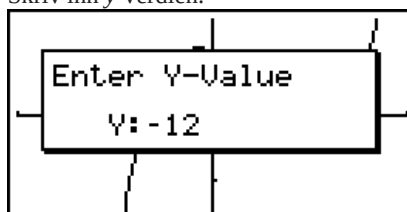
Trykk F6.



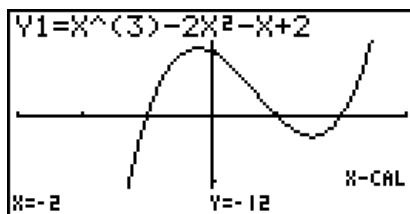
Velg X-CAL ved å trykke F2.



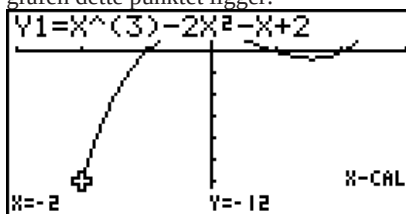
Skriv inn y-verdien.



Trykk EXE.



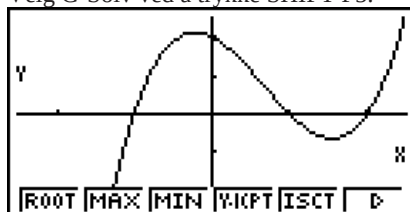
Her har vi endret vinduet slik at vi ser hvor på grafen dette punktet ligger.



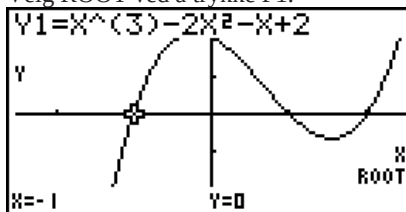
Svar: $x = -2$ når $f(x) = -12$.

d)

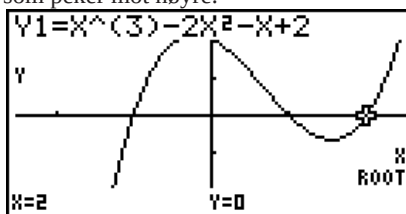
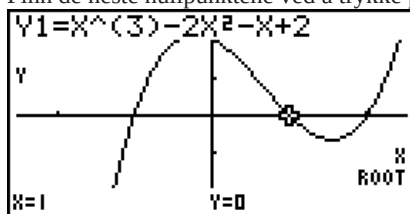
Velg G-Solv ved å trykke SHIFT F5.



Velg ROOT ved å trykke F1.



Finn de neste nullpunktene ved å trykke pil som peker mot høyre.



Svar: Nullpunktene på grafen til f er $(-1,0)$, $(1,0)$ og $(2,0)$.

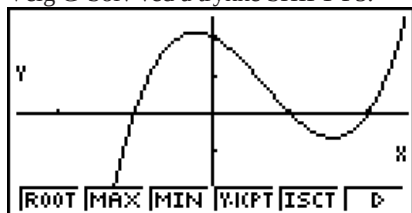
Kommentar:

Vi kan løse likningen $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ grafisk ved å bestemme nullpunktene på grafen til f gitt ved $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$.

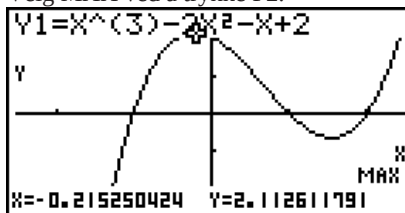
Altså: $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$ og $x = 2$. Les mer om grafisk løsning av likninger i avsnitt 4.5.

e)

Velg G-Solv ved å trykke SHIFT F5.



Velg MAX ved å trykke F2.

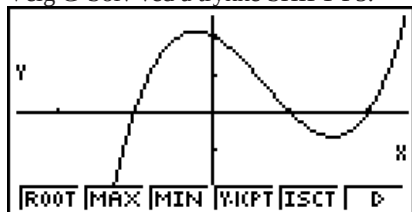


Svar: Grafen til f har toppunkt $(-0,215,2,113)$.

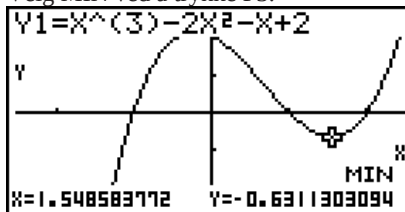
Merk:

Dersom en graf har flere toppunkt, må du trykke pil som peker mot høyre for å få fram koordinatene.

Velg G-Solv ved å trykke SHIFT F5.



Velg MIN ved å trykke F3.



Svar: Grafen til f har bunnpunkt $(1,549,0,631)$.

Merk:

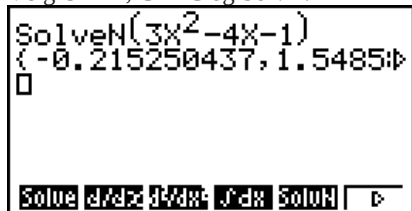
Dersom en graf har flere bunnpunkt, må du trykke pil som peker mot høyre for å få fram koordinatene.

Kontroll:

Vi finner uttrykket for den deriverte: $f'(x) = 3x^2 - 4x - 1$.

Gå til RUN-MAT i hovedmenyen.

Velg OPTN, CALC og SolvN.



Altså: $f'(x) = 0$ for $x = -0,215$ og $x = 1,549$.

4.4 Skjæringspunkt mellom grafer



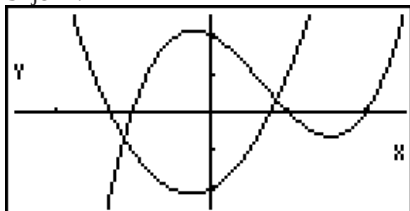
Tegn grafen til funksjonen f gitt ved $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$.

Tegn grafen til g gitt ved $g(x) = 2x^2 + x - 2$ i samme koordinatsystem.

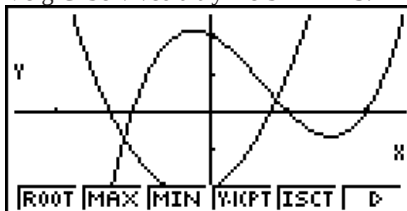
Bestem eventuelle skjæringspunkt mellom de to grafene.

Vi tegnet de to grafene i avsnitt 4.1.

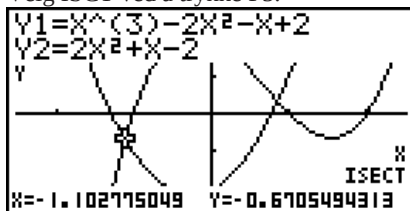
Skjerm.



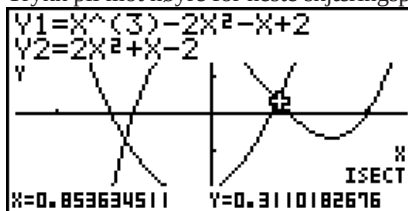
Velg G-Solv ved å trykke SHIFT F5.



Velg ISCT ved å trykke F5.



Trykk pil mot høyre for neste skjæringspunkt.

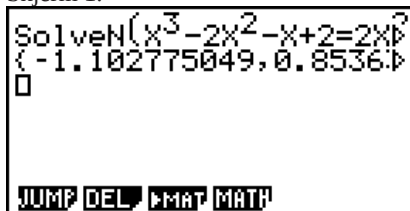


Svar: Skjæringspunkt mellom grafene er $(-1,103, -0,671)$ og $(0,854, 0,311)$.

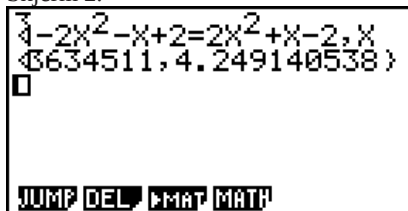
Kommentar:

Vi kan kontrollere den grafiske løsningen ved å løse likningen $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 2x^2 + x - 2$.

Skjerm 1.



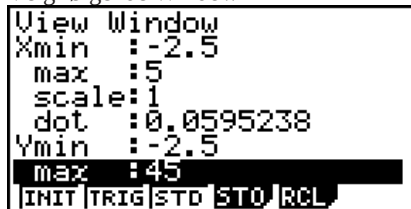
Skjerm 2.



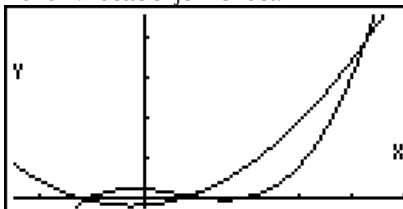
Viktig merknad:

Skjerm 2 viser at det eksisterer et skjæringspunkt til i tillegg til de to punktene vi fant grafisk. Vi må utvide aksene i positiv retning for å oppdage dette skjæringspunktet i koordinatsystemet.

Velg følgende Window

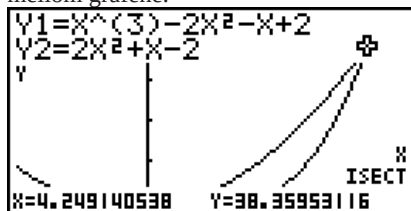


Da får vi dette skjermbildet.



Vi får øye på det tredje skjæringspunktet med x-verdi lik 4,249.

Velg G-Solv og ISCT. Trykk pil mot høyre to ganger for å få fram det siste skjæringspunktet mellom grafene.

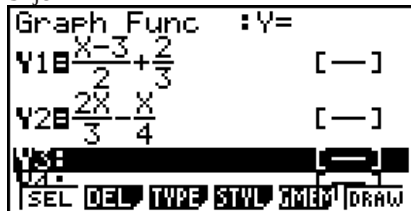


4.5 Grafisk løsning av likninger

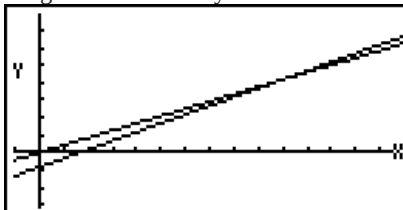
Først bruker vi intersection til å løse en enkel likning.

I kapittel 3 løste vi likningen $\frac{x-3}{2} + \frac{2}{3} = \frac{2x}{3} - \frac{x}{4}$ i RUN-MAT. Denne likningen kan også løses grafisk. Vi legger venstre side av likningen inn som funksjonen Y1 og høyre side inn som Y2.

Skjerm

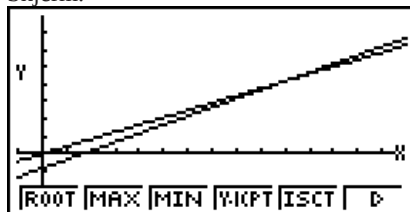


Velg DRAW ved å trykke F6.

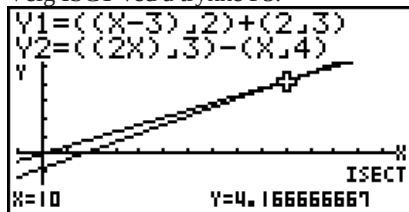


Juster View Window slik at du kan se skjæringspunktet mellom de to grafene. Velg G-Solv ved å trykke SHIFT F5.

Skjerm.



Velg ISCT ved å trykke F5.



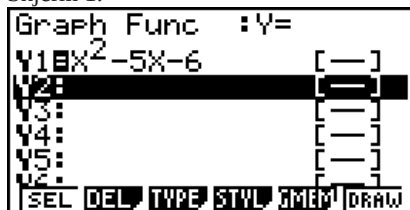
Likningen $\frac{x-3}{2} + \frac{2}{3} = \frac{2x}{3} - \frac{x}{4}$ har altså løsning $x = 10$.



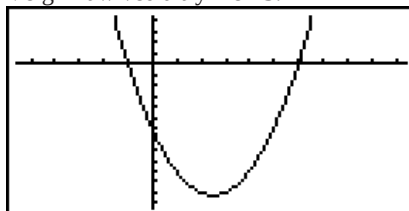
Løs andregradslikningen: $x^2 - 5x - 6 = 0$

I denne oppgaven benytter vi ROOT til å løse likningen.

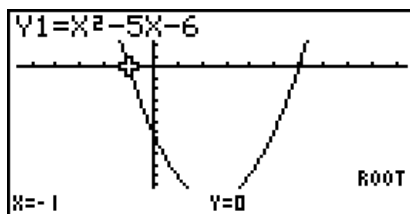
Skjerm 1.



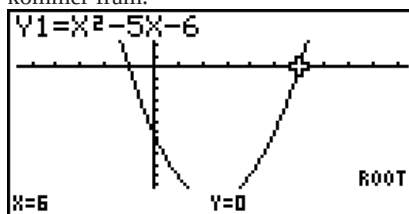
Velg Draw ved å trykke F5.



G-Solv etterfulgt av ROOT gir.



Trykk piltast mot høyre og den andre løsningen kommer fram.



Andregradslikningen $x^2 - 5x - 6 = 0$ har altså løsning $x = -1$ og $x = 6$.



Løs likningssettet grafisk

$$2x - 3y = -3$$

$$x - y = -2$$

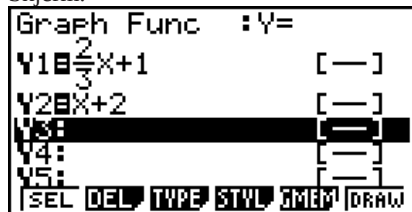
Først må vi omforme likningene slik at de kommer på formen $y = ax + b$. Da får vi:

$$y = \frac{2}{3}x + 1$$

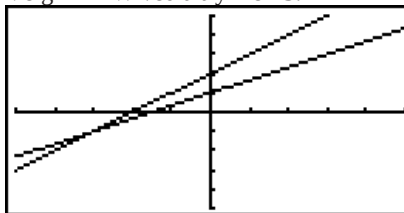
$$y = x + 2$$

Vi legger inn uttrykkene for y .

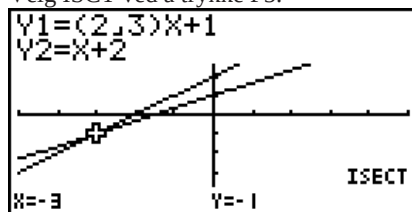
Skjerm.



Velg DRAW ved å trykke F5.



Velg ISCT ved å trykke F5.



Likningssettet har løsningen $x = -3$ og $y = -1$.

Øv på grafiske løsninger av enkle likninger, andregradslikninger, tredjegradslikninger, eksponentiallikninger, logaritmelikninger og likninger med to ukjente.

4.6 Derivert og andrederivert



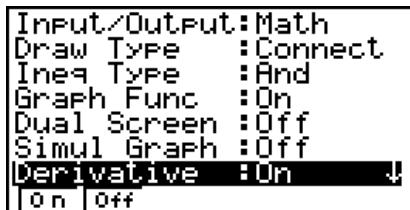
Funksjonen f er gitt ved $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$.

Bestem $f'(2)$.

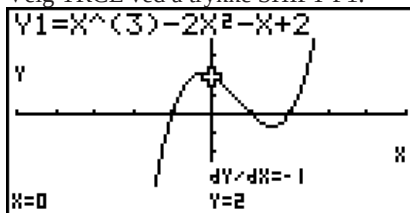
Gå inn i SET UP og sett Derivative til On.

Gå ut av SET UP ved hjelp av Exit

Velg Draw ved å trykke F6



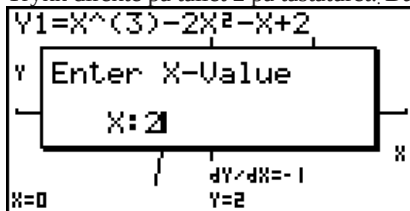
Velg TRCE ved å trykke SHIFT F1.



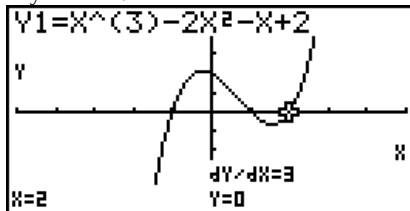
Her ser vi at $f'(0) = -1$.

Vi skal imidlertid bestemme $f'(2)$.

Trykk direkte på tallet 2 på tastaturet. Da får vi følgende skjerm.



Trykk EXE.



Svar: $f'(2) = 3$.

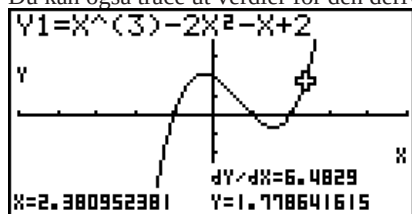
Kontroll:

Velg RUN-MAT i hovedmenyen. Deretter velger vi OPTN og CALC. Velg d/dx ved å trykke F2. Legg inn funksjonsuttrykket og den angitte x-verdi.

Calculator screen showing the derivative of $x^3 - 2x^2 - x + 2$ at $x=2$. The result is 3.

Vi får bekreftet at $f'(2) = 3$.

Du kan også trace ut verdier for den deriverte til funksjonen.



Flytt markøren ved hjelp av piltastene.

Når Derivative er satt til On, kan vi skrive ut en tabell som viser sammenhørende verdier for x og y samt verdiene for den deriverte.

På dette skjermbildet ser vi for eksempel at $f'(2) = 3$ og $f'(3) = 14$

X	Y1	Y'1
1.5	-0.625	-0.25
2	0	3
2.5	2.625	7.75
3	8	14



Funksjonen f er gitt ved $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$.

Bestem $f''(3)$.

Velg RUN-MAT i hovedmenyen. Deretter velger vi OPTN og CALC. Velg d^2/dx ved å trykke F2. Legg inn funksjonsuttrykket og den angitte x-verdi.

Skjerm.

$\frac{d^2}{dx^2}(x^3 - 2x^2 - x + 2) \Big|_{x=3} = 14$

Svar: $f''(3) = 14$



Funksjonen f er gitt ved $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$.

Bestem x -verdien til eventuelle vendepunkt på grafen til f .

Vi får at $f'(x) = 3x^2 - 4x - 1$ og $f''(x) = 6x - 4$

$\text{SolveN}(6X - 4) = \left\{ \frac{2}{3} \right\}$

Svar: Grafen til f har vendepunkt for $x = \frac{2}{3}$.

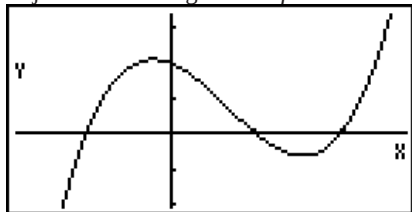
4.7 Integral - areal



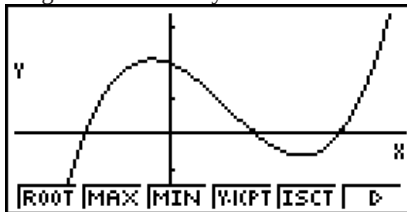
Funksjonen f er gitt ved $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$.

Bestem arealet av området som ligger i første kvadrant og som er avgrenset av grafen til f og de to aksene.

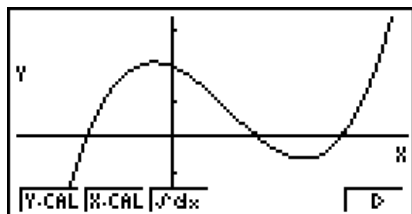
Skjerm som viser grafen til f .



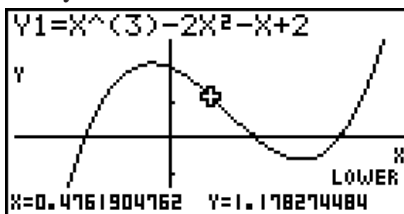
Velg G-Solv ved å trykke SHIFT F5.



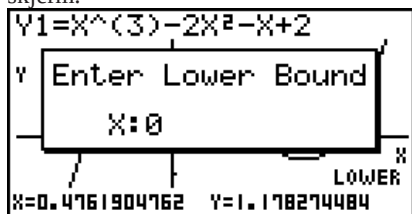
Trykk F6.



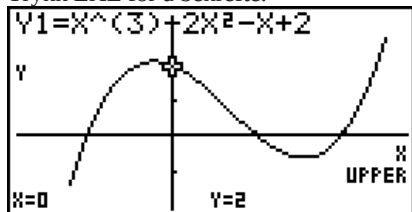
Velg $\int dx$ ved å trykke F3.



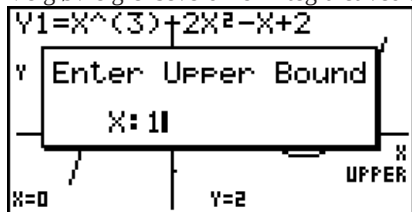
Velg nedre grenseverdi for integralet ved å trykke direkte på tallet 0. Da får vi følgende skjerm.



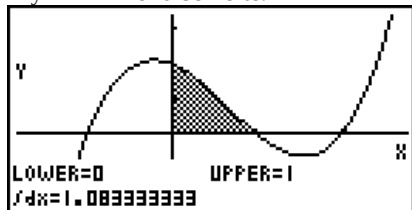
Trykk EXE for å bekrefte.



Velg øvre grenseverdi for integralet ved å trykke direkte på tallet 1.



Trykk EXE for å bekrefte.

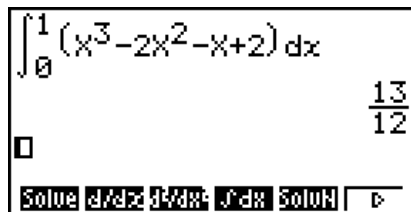


Vi ser at arealet som ligger i første kvadrant og som er avgrenset av grafen til f og de to aksene, er lik 1,0833.

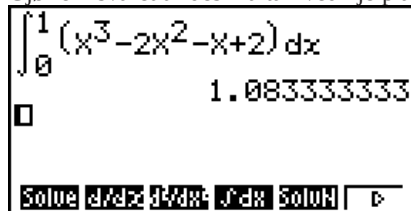
Kontroll:

Gå til RUN-MAT i hovedmenyen. Velg OPTN, CALC og $\int dx$.

Skriv inn funksjonsuttrykket og grenseverdiene. Trykk EXE. Svaret er altså $\frac{13}{12}$.



Gjør om svaret til desimaltall ved hjelp av



Vi får bekreftet svaret fra den grafiske løsningen.

4.8 Integral - volum av omdreingslegeme



Et område er avgrenset av grafen til $y = \sqrt{x}$ der $0 \leq x \leq 4$ og x -aksen. Vi roterer dette området rundt x -aksen. Da får vi et omdreingslegeme.

Regn ut volumet av omdreingslegemet.

Volumet av omdreingslegemet er gitt ved: $\text{Volume} = \int_a^b \pi(\text{radius})^2 dx = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$

Gå til RUN-MAT i hovedmenyen. Velg OPTN, CALC og $\int dx$. Legg inn formelen.

Skjerm.

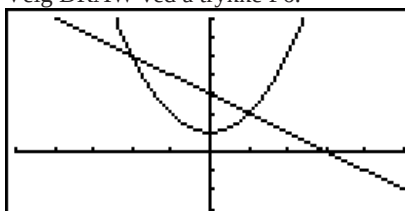
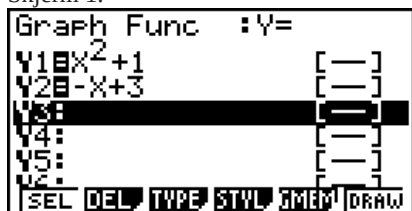
Volumet av omdreiningslegemet er altså 8π .



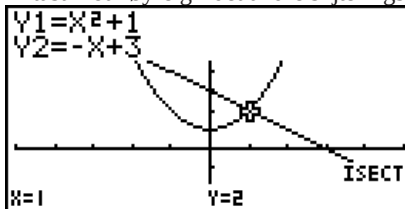
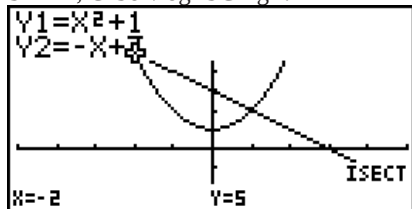
Bestem volumet til omdreiningseget.

Grensene til det bestemte integralet er i dette tilfellet x -koordinatene til skjæringspunktene mellom parabolen og den rette linjen.

Velg DRAW ved å trykke F6.



Piltast mot høyre gir det andre skjæringspunktet.



Vi kan også bestemme x -koordinatene til skjæringspunktet ved hjelp av SolveN.

SolveN($X^2+1=-X+3,X$)
 (-2,1)
 □

Solve d/dx d/dx d/dx d/dx d/dx d/dx d/dx d/dx

Gå til RUN-MAT i hovedmenyen. Velg OPTN, CALC og $\int dx$. Merk at integranden er differansen mellom $y^2 = (-x+3)^2$ og $y^2 = (x^2+1)^2$.

Vi får.

Skjerm 1.

$$\pi \int_{-2}^1 ((-x+3)^2 - (x^2+1)^2) dx = \frac{117}{5} \pi$$

Skjerm 2.

$$\int_{-2}^1 ((-x+3)^2 - (x^2+1)^2) dx = \frac{117}{5} \pi$$

4.9 Integral - overflate av omdreiningslegeme

Hvis funksjonen f er deriverbar i hele intervallet $a \leq x \leq b$, er overflatearealet til omdreiningslegemet vi får når kurven $y = f(x)$ roterer rundt x -aksen, gitt ved

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$



Området avgrenset av halvsirkelen $y = \sqrt{1-x^2}$ og x -aksen roterer rundt x -aksen. Omdreiningslegemet som da framkommer, er en kule med radius 1.

Bestem overflatearealet til denne kula.

Først finner vi at $y' = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ som gir $(y')^2 = \frac{x^2}{1-x^2}$

Gå til RUN-MAT i hovedmenyen. Velg OPTN, CALC og $\int dx$. Legg inn integranden og grenseverdiene i det bestemte integralet.

Skjerm 1.

$$2\pi \int_{-1}^1 \left(\sqrt{1-x^2} \times \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}} \right) dx = 4\pi$$

Skjerm 2.

$$\int_{-1}^1 \left(\sqrt{1-x^2} \times \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}} \right) dx = 4\pi$$

Overflatearealet til en kule med radius 1 er altså $4\pi r^2 = 4\pi \cdot 1^2 = 4\pi$

4.10 Integral – buelengde

Hvis funksjonen $y = f(x)$ har en kontinuerlig derivert i hele intervallet $a \leq x \leq b$, så er

buelengden L til kurven $y = f(x)$ fra a til b gitt ved $L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$.

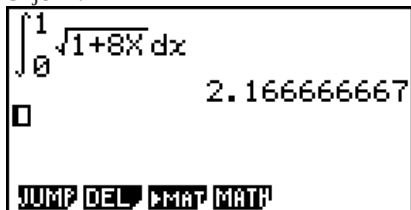


Bestem buelengden til kurven $y = f(x) = \frac{4\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}} - 1$ der $0 \leq x \leq 1$.

Først finner vi at $y' = \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}x$ som gir $(y')^2 = 8x$

Gå til RUN-MAT i hovedmenyen. Velg OPTN, CALC og $\int dx$. Legg inn integranden og grenseverdiene i det bestemte integralet.

Skjerm.



Buelengden $L \approx 2,167$ eller $\frac{13}{6}$.

4.11 Parameterframstilling

Mange svært interessante grafer er ikke funksjonsgrafer av typen $y = f(x)$, men kan beskrives ved at både x and y selv er funksjoner av en såkalt parameter. Sirkelen $x^2 + y^2 = 1$ kan for eksempel beskrives parametrisk ved $x = \cos t$ and $y = \sin t$. Her er altså t den såkalte parameteren. Kurven som et bevegelig punkt følger, kan på denne måten beskrives av en parameter, der parameteren t er tiden.

Et bevegelig punkt festet til et roterende hjul er et interessant eksempel der parameterframstilling kan anvendes. Den såkalte sykloiden kan beskrives av et punkt som er festet på eiken til et hjul som triller bortover på et horisontalt underlag.



Vi tenker oss at en sirkel med radius 2 ruller på x -aksen uten å gli. Et fast punkt P på sirkelen beskriver da en kurve som vi kaller en *sykloide*. Parameterframstillingen til sykloiden er

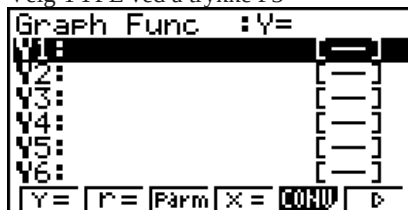
$$x(t) = a(t - \sin t) \quad y(t) = a(1 - \cos t), \text{ der } a \text{ er radius.}$$

Tegn kurven på lommeregneren.

Velg GRAPH i hovedmenyen.



Velg TYPE ved å trykke F3



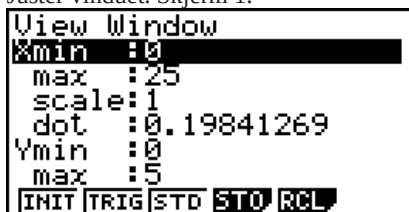
Velg Parm ved å trykke F3.



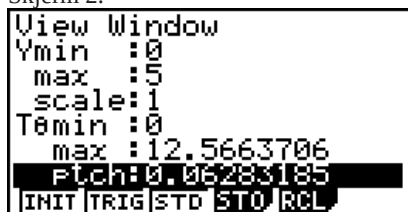
Skriv inn funksjonsuttrykkene.



Juster vinduet. Skjerm 1.



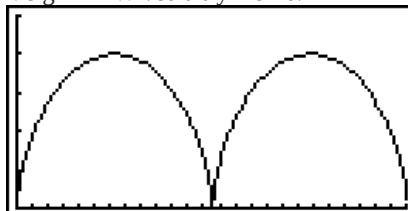
Skjerm 2.



Trykk EXIT



Velg DRAW ved å trykke F6.



Grafen tegner sykloiden.



Kurven med parameterframstillingen $x = t \cos t$, $y = t \sin t$, er en type kurve som vi kaller Arkimedes' spiral.

Tegn Arkimedes' spiral for $t \in [0, 6\pi]$.

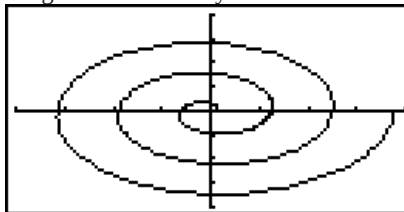
Skriv inn funksjonsuttrykkene.

```

Graph Func : Param
Xt1: Tcos (T)  [—]
Yt1: Tsin (T)
Xt2:           [—]
Yt2:           [—]
Xt3:           [—]
Yt3:           [—]
[SEL] [DEL] [TYPE] [STYL] [MEM] [DRAW]

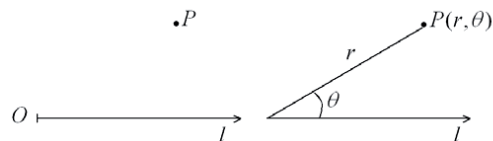
```

Velg DRAW ved å trykke F6.



4.12 Polarkoordinater

Anta at l er en rettlinjet akse som starter i origo O , og at P er et punkt i planet. Vi kan lokalisere P i forhold til l og O ved å spesifisere både avstanden r fra O til P og vinkelen θ som linjestykket OP danner med l .



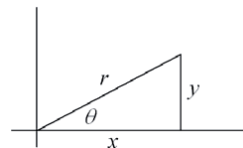
Det ordnede tallparet (r, θ) kaller vi polarkoordinatene til punktet P .

Polarkoordinatene til punktet P er ikke spesifikke.

Siden vinkelen gjentar seg for hver 2π , er det opplagt at $(r, \theta) = (r, \theta + 2\pi)$.

En negativ verdi for r tilsvarer en dreining på 180° . Det betyr at $(-r, \theta) = (r, \theta + \pi)$.

Hvis vi lar akse l være den positive x -aksen, kan punktet P i planet ha både kartesiske koordinater (x, y) og polarkoordinater (r, θ) . Se figuren nedenfor.



Ved å anvende definisjonen av sinus og cosinus får vi følgende sammenheng mellom de kartesiske koordinatene (x, y) og polarkoordinatene (r, θ) :

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

Vi kan også uttrykke r og θ ved x og y .

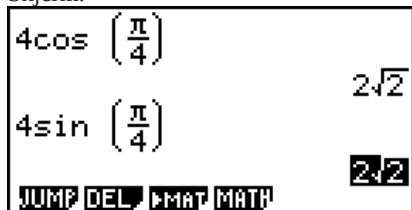
Vi får at $r^2 = x^2 + y^2$ og $\tan \theta = \frac{y}{x}$.

Altså $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ og $\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$.

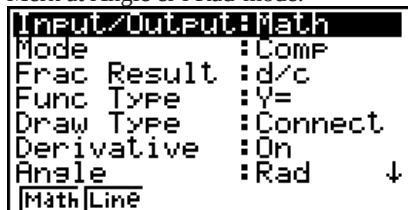


Gjør om koordinatene $(4, \frac{\pi}{4})$ fra polarkoordinater til kartesiske koordinater.

Skjerm.



Merk at Angle er i Rad-mode.

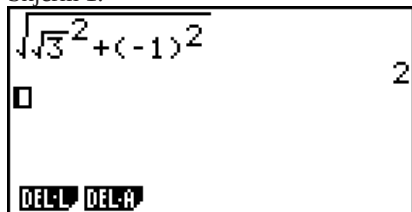


Svar: $x = 2\sqrt{2}$ og $y = 2\sqrt{2}$

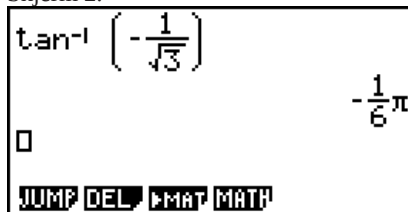


Gjør om koordinatene for punktet $(\sqrt{3}, -1)$ fra kartesiske koordinater til polarkoordinater.

Skjerm 1.



Skjerm 2.



Svar: $r = 2$ og $\theta = -\frac{\pi}{6}$

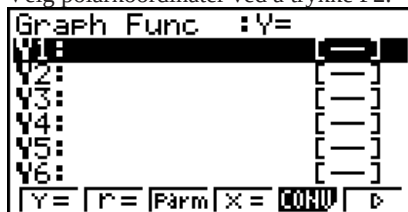


Kurven $r = 2(1 + \cos \theta)$ har form som et hjerte og blir derfor kalt kardioiden. Tegn kurven.

Vel TYPE ved å trykke F3.



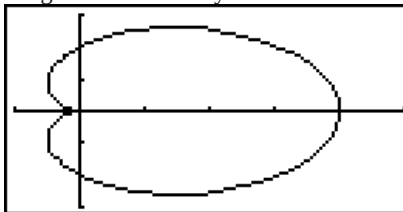
Velg polarkoordinater ved å trykke F2.



Legg inn funksjonen.



Velg DRAW ved å trykke F6.

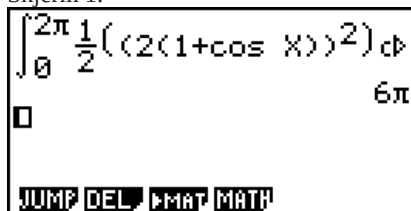


Regn ut arealet til området avgrenset av kardioiden gitt ved $r = 2(1 + \cos \theta)$.

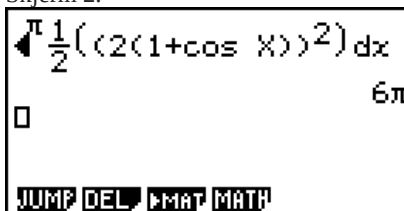
Arealet A av området avgrenset av kurven $r = f(\theta)$ og $r = r(\theta)$ der $\theta \in [\alpha, \beta]$ er gitt ved

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2 d\theta.$$

Skjerm 1.

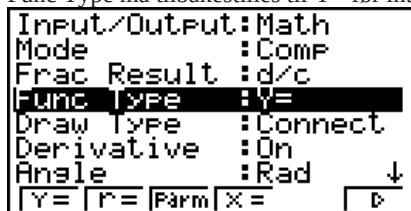


Skjerm 2.



Viktig merknad:

Func Type må tilbakestilles til Y= før integralet regnes ut.



Lommeregneren er ikke utstyrt med $\int d\theta$. Når vi bruker $\int dx$, blir θ oppfattet som en konstant. Derfor er det helt nødvendig å bruke X og ikke θ i integranden.



Regn ut buelengden til kardioiden gitt i polarkoordinater ved $r = 2(1 + \cos \theta)$.

Dersom $r = f(\theta)$ har en kontinuerlig derivert for $\theta \in [\alpha, \beta]$ og hvis punktet $P(r, \theta)$ ligger på kurven $r = f(\theta)$ kun en gang når θ går fra α to β , er lengden av kurven gitt ved

$$\text{formelen } L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

Vi får at $\frac{dr}{d\theta} = -2\sin \theta$.

Skjerm 1.

Skjerm 2.

Buelengden er 16.

Generelt er likningen for en kardioid gitt ved $r = 2a(1 + \cos \theta)$.

Utfordring.

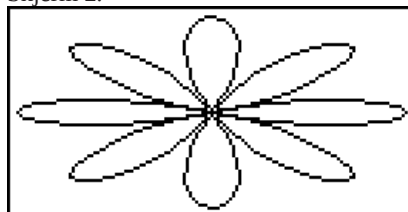
Bruk lommeregneren til å verifisere at buelengden til en kardioid generelt er gitt ved $16a$ og at arealet avgrenset av en kardioid er $6\pi a^2$.



Eksperimenter med $r = a \cos n\theta$ og $r = a \sin n\theta$ og undersøk om det er noen sammenheng mellom antall blader og om hvorvidt n er partall eller oddetall. Se skjermbildene nedenfor.

Skjerm 1.

Skjerm 2.



4.13 Regresjon. Funksjonstilpasning.

En viktig side ved bruk av funksjoner er å lage matematiske modeller som tilnærmet beskriver sammenhenger vi observerer. Observasjonene vi gjør, blir tatt vare på og lagt inn i tabeller. På grunnlag av tabellene forsøker vi så å lage modeller som best mulig beskriver sammenhengen mellom y -verdier og x -verdier. Denne prosessen kaller vi regresjon eller funksjonstilpasning.

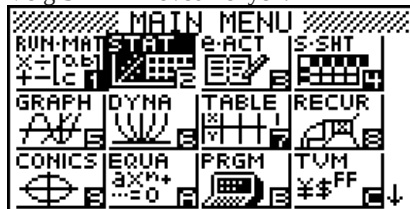


Et butikkssenteret ble åpnet for et par år siden. Tabellen under viser omsetningen de første månedene etter åpning. Januar er måned 1, februar er måned 2 og så videre.

Måned	5	10	15	20	25
Omsetning (i millioner kroner per måned)	1,8	3,2	4,2	4,8	5,0

Finn en modell for omsetningen per måned i de 25 første månedene.

Velg **STAT** i hovedmenyen.



Legg inn tabellverdiene i List 1 og List 2.

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	5	1.8		
2	10	3.2		
3	15	4.2		
4	20	4.8		
TOOL	EDIT	DEL	DEL A	INS

Trykk F6 og velg deretter **CALC** ved å trykke F2.

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
3	15	4.2		
4	20	4.8		
5	25	5		
6				
GRAPH	CALC	TEST	DATA	DIST

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
3	15	4.2		
4	20	4.8		
5	25	5		
6				
1VAR	2VAR	REG		SET

Velg **REG** ved å trykke F3.

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
3	15	4.2		
4	20	4.8		
5	25	5		
6				
X	Med	X^2	X^3	X^4

Velg x^2 ved å trykke F3.

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
3	15	4.2		
4	20	4.8		
5	25	5		
6				
X	Med	X^2	X^3	X^4

Skjerm.

```
QuadReg
a = -8E-03
b = 0.4
c = 0
r² = 1
MSe = 0
y = ax² + bx + c
```

COPY

QuadReg gir en andregradsfunksjon. Vi ser at $r^2 = 1$. Det betyr at funksjonen passer helt perfekt. Ved hjelp av regresjon på lommeregneren har vi funnet at funksjonen f gitt ved $f(x) = -0.008x^2 + 0.4x$, kan brukes som en matematisk modell for omsetningen per måned i de 25 første månedene.



Plott punktene og tegn grafen som viser omsetningen per måned i de 25 første månedene.

Velg GRPH ved å trykke F1

SUB	List 1	List 2	List 3	List 4
1	5	1.8		
2	10	3.2		
3	15	4.2		
4	20	4.8		
				5

GRAPH CALC TEST DISTR DIST D

Velg SET ved å trykke F6.

SUB	List 1	List 2	List 3	List 4
1	5	1.8		
2	10	3.2		
3	15	4.2		
4	20	4.8		
				5

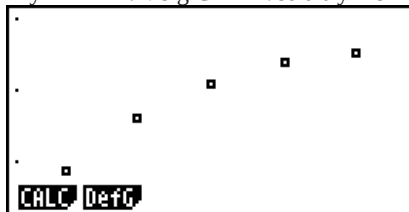
GRAPH1 GRAPH2 GRAPH3 SEL SET

Velg GPH1 ved å trykke F1. Gjør følgende valg.

```
StatGraph1
Graph Type : Scatter
XList      : List1
YList      : List2
Frequency  : 1
Mark Type  : *
```

GRAPH1 GRAPH2 GRAPH3

Trykk EXIT. Velg GPH1 ved å trykke F1.



Velg DefG ved å trykke F2.

```
Graph Func : Y=
Y1 E-8E-03X²+0.4X[-]
Y2:
Y3:
Y4:
Y5:
Y6:
SEL DEL Y STWL DRAW
```

Velg DRAW ved å trykke F6.



Grafen viser omsetningen per måned i de 25 første månedene.



Gjennom en årrekke har skogforvaltere målt høyden på ulike trær i forskjellige omgivelser. For en bestemt tresort ble høyden på et tre bokført i en 30-årsperiode.

x – alder [år]	0	5	10	15	20	25	30
$f(x)$ – høyde [m]	0	0,45	1,75	3,70	6,10	8,80	11,60

Finn en matematisk modell som best beskriver høyden til treet i denne 30-årsperioden.

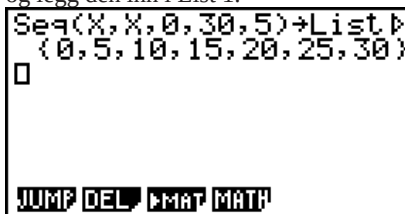
Etter å ha prøvet og feilet med lineær og kvadratisk regresjon, finner vi ut at CubicReg passer som hånd i hanske.

Denne gangen velger vi å legge verdiene inn i List 1 på en rasjonell måte.

Velg RUN-MAT i hovedmenyen ved å trykke EXE. Trykk OPTN. Velg List ved å trykke F1.

Skjerm

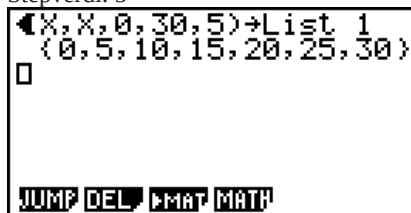
Velg Seq ved å trykke F5. Skriv inn sekvensen og legg den inn i List 1.



Startverdi: 0

Sluttverdi: 30

Stepverdi: 5



Vi kan spare mye tid på å legge verdier inn i lister på denne måten – særlig når det handler om mange verdier.

Velg STAT i hovedmenyen. Vi ser at List 1 er fylt inn.

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	0			
2	5			
3	10			
4	15			

GRAPH CALC TEST IHTB DIST

Vi legger inn høyden til treet i List 2.

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
5	20	6.1		
6	25	8.8		
7	30	11.6		
8				

GRAPH CALC TEST IHTB DIST

Velg CALC, REG og x^3

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
5	20	6.1		
6	25	8.8		
7	30	11.6		
8				

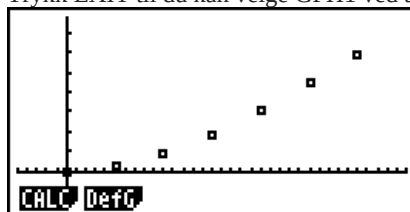
X Med x^2 x^3 x^4

Vi ser at $r^2 \approx 1$ og det betyr at tredjegradsfunksjonen beskriver utviklingen av trehøyden på en nærmest perfekt måte.

CubicReg
a = -2.444E-04
b = 0.02035714
c = -4.007E-03
d = -2.38E-03
$r^2 = 0.99999897$
MSe = 3.9682E-05

COPY

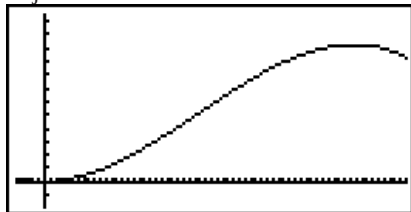
Trykk EXIT til du kan velge GPH1 ved å trykke F1.



Ved hjelp av regresjon på lommeregneren har vi funnet at funksjonen f gitt ved $f(x) = -0,00024x^3 + 0,02x^2$, kan brukes som en matematisk modell for høyden til treet i denne 30-årsperioden. Vi kan tillate oss å kutte ut førstegradsleddet og konstantleddet. Sammenlignet med tredjegradsleddet og andregradsleddet er de to siste leddene neglisjerbare.

På skjermen nedenfor har vi strukket definisjonsmengden til 60 år. I følge modellen vil treet nå maksimum høyde etter omtrent 55 år. Det får oss til å tro at modellen neppe er gyldig lengre enn i 55 år. For en eventuell videre vekst må vi jakte på en ny modell.

Skjerm.



Vi kan ikke bruke en modell som fører til at et tre begynner å krympe voldsomt i høyden etter at det har nådd maksimum høyde.

4.14 Grafisk løsning av ulikheter

Når vi løser enkle ulikheter, gjelder de samme regnereglene som for likninger, men med et **viktig** unntak:

Dersom vi dividerer eller multipliserer med et negativt tall, må vi snu ulikhetstegnet.



Løs ulikheten: $3x + 5 > 5x + 3$ uten lommeregner.

$$3x + 5 > 5x + 3$$

$$3x - 5x > 3 - 5$$

$$-2x > -2 \quad \text{Vi dividerer med } -2 \text{ på begge sider og må snu ulikhetstegnet.}$$

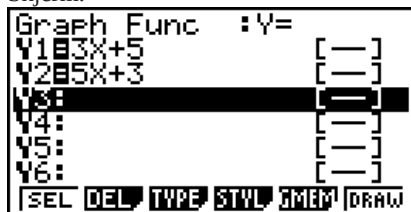
$$x < 1$$



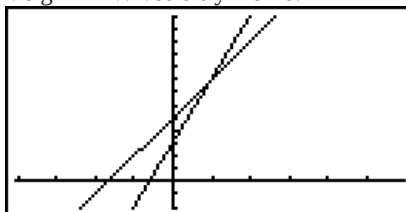
Løs ulikheten: $3x + 5 > 5x + 3$ med lommeregner.

Alternativ I:

Skjerm.



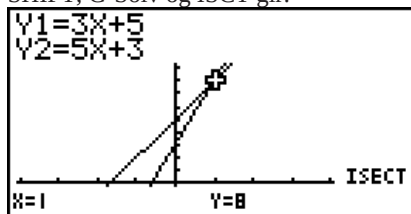
Velg DRAW ved å trykke F6.



Merk at $y = 5x + 3$ er den bratteste linjen.

Siden $Y1 > Y2$ er ulikheten oppfylt for x -verdier der $Y1$ ligger høyere enn $Y2$.

SHIFT, G-Solv og ISCT gir.



Løsning: $x < 1$

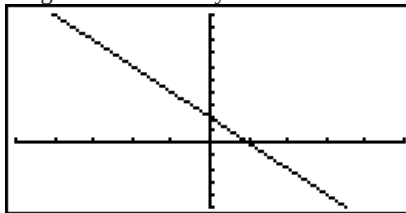
Alternativ II:

$$\begin{aligned} 3x + 5 &> 5x + 3 \\ 3x + 5 - 5x - 3 &> 0 \\ -2x + 2 &> 0 \end{aligned}$$

Skjerm.

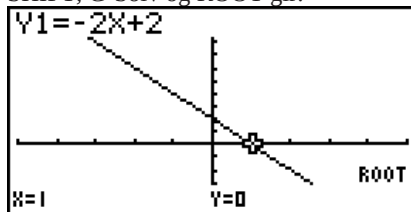


Velg DRAW ved å trykke F6.



Siden $Y1 > 0$ er ulikheten oppfylt for x -verdier der $Y1$ ligger over x -aksen.

SHIFT, G-Solv og ROOT gir.



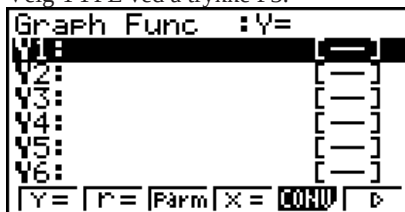
Løsning: $x < 1$

Alternativ III.

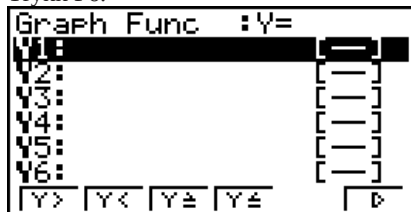
Skjerm.



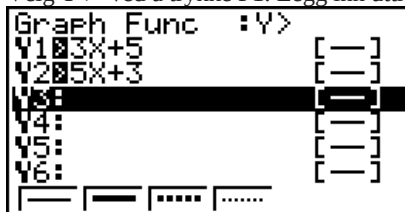
Velg TYPE ved å trykke F3.



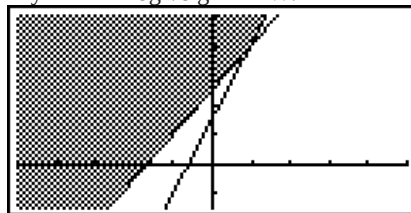
Trykk F6.



Velg $Y >$ ved å trykke F1. Legg inn uttrykkene.

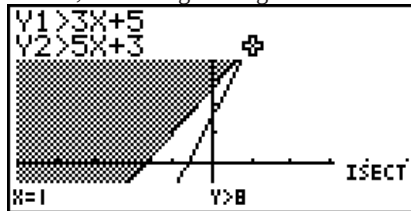


Trykk EXIT og velg DRAW.



Området der ulikheten er oppfylt, er skravert.

SHIFT, G-Solv og ISCT gir.



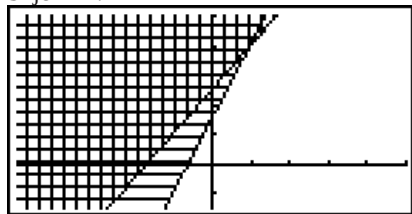
Løsning: $x < 1$.

Merk at Ineq Type er satt til And i SET UP. Dersom vi velger Ineq Type til Or får vi. Se neste.

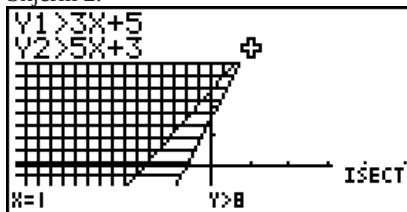
```
Input/Output:Math
Draw Type :Connect
Ineq Type :And
Graph Func :On
Dual Screen :Off
Simul Graph :Off
Derivative :On
And|Or
```

```
Input/Output:Math
Draw Type :Connect
Ineq Type :Or
Graph Func :On
Dual Screen :Off
Simul Graph :Off
Derivative :On
And|Or
```

Skjerm 1.



Skjerm 2.



4.14 Absoluttfunksjonen



Tegn grafen til funksjonen f gitt ved $f(x) = |x|$.

Velg GRAPH i hovedmenyen.

```
Graph Func :Y=
V1:
V2:
V3:
V4:
V5:
V6:
SEL DEL TYPE STYL ZMEM DRAW
```

Trykk OPTN.

```
Graph Func :Y=
V1:
V2:
V3:
V4:
V5:
V6:
List CALC HYP PROB NUM
```

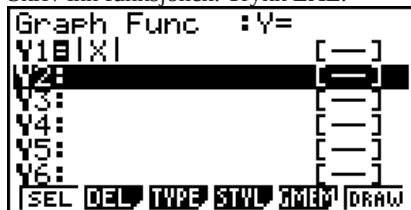
Velg NUM ved å trykke F5.

```
Graph Func :Y=
V1:
V2:
V3:
V4:
V5:
V6:
Abs Int Frac Ints
```

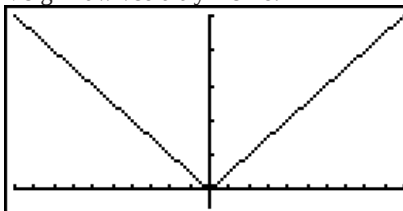
Velg Abs ved å trykke F1.

```
Graph Func :Y=
V1:=|x|
V2:
V3:
V4:
V5:
V6:
Y r Xt Yt X
```

Skriv inn funksjonen. Trykk EXE.



Velg Draw ved å trykke F6.



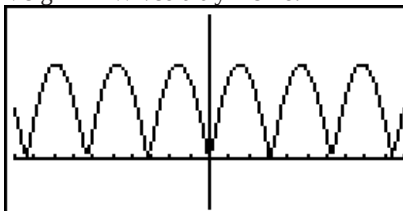
Tegn grafen til funksjonen f gitt ved $f(x) = |\sin x|$.

Vi lærer mer om trigonometriske funksjoner i kapittel 5.

Skriv inn funksjonen.



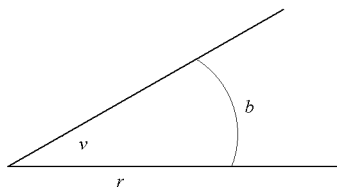
Velg DRAW ved å trykke F6.



5. Trigonometri

5.1 Grader og radianer

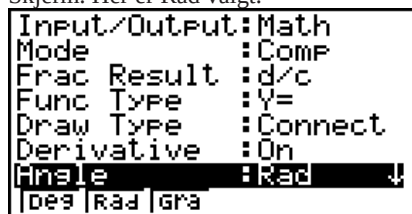
Absolutt vinkelmål (radianer) er gitt ved $v = \frac{b}{r}$.



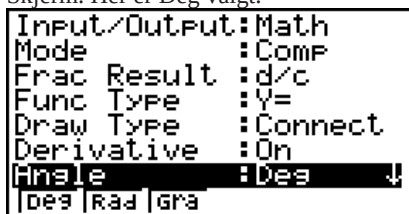
Hvis vi lar vinkelen være v radianer og n grader, så får vi at $\frac{v}{\pi} = \frac{n}{180^\circ}$.

I SET UP kan vi velge mellom Deg, Rad og Gra. Vi vil konsentrere oss om Deg og Rad.

Skjerm. Her er Rad valgt.



Skjerm. Her er Deg valgt.



Det er svært viktig å være klar over om lommeregneren er stilt i Deg- eller Rad-mode.



Gjør om 30° til radianer.

Still Angle i Rad-mode.

Trykk OPTN og F6.



Velg ANGL ved å trykke F5.



Skriv inn gradetallet, velg gradetegnet og trykk EXE.



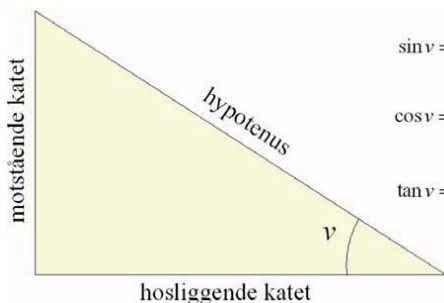
Gjør om $\frac{\pi}{3}$ til grader.

Still Angle i Deg-mode.

Trykk OPTN, F6, velg ANGL ved å trykke F5, skriv inn vinkelen og velg r ved å trykke F2. Trykk EXE.



5.2 Beregne sinus, cosinus og tangens



$$\sin v = \frac{\text{motstående katet}}{\text{hypotenus}}$$

$$\cos v = \frac{\text{hosliggende katet}}{\text{hypotenus}}$$

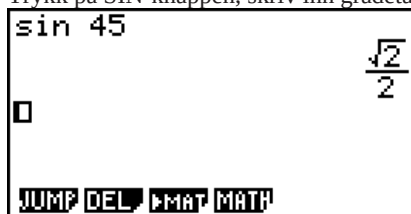
$$\tan v = \frac{\text{motstående katet}}{\text{hosliggende katet}}$$



Sinus til 45° ?

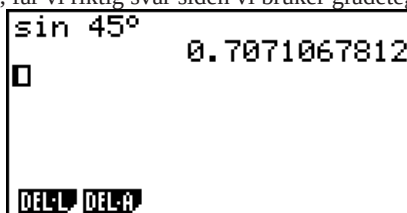
Still Angle i Deg-mode.

Trykk på SIN-knappen, skriv inn gradetallet og trykk EXE.

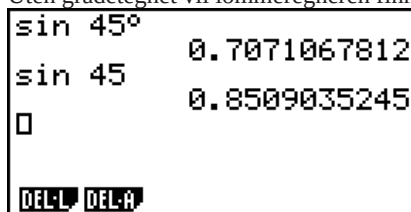


Dersom lommeregneren står i Rad-mode kan du finne sinus til 45° ved å bruke gradetegnet bak 45.

Skjerm. Selv om vi her har valgt Rad-mode, får vi riktig svar siden vi bruker gradetegnet.



Uten gradetegnet vil lommeregneren finne sinus til 45 radianer.



Cosinus til $\frac{\pi}{4}$?

Dersom vi ikke har sjekket hvilken mode som er valgt for Angle, må vi bruke r bak $\frac{\pi}{4}$.

Skjerm.



Svaret som desimal. Bruk F $\leftrightarrow$ D.





Tangens til 60° ?

Skjerm. Bruk gradetegnet dersom du ikke har sjekket hvilken mode som er valgt for Angle.

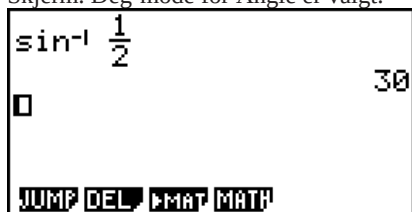


5.3 Beregne vinkelen

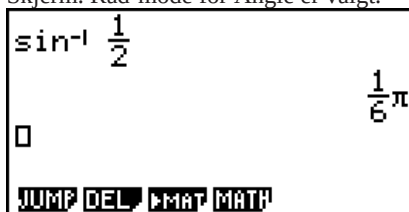


Bestem vinkel v når $\sin v = \frac{1}{2}$

Skjerm. Deg-mode for Angle er valgt.

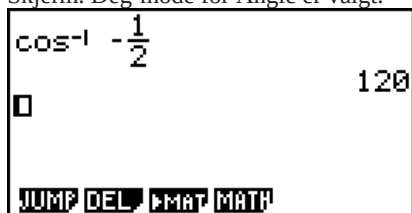


Skjerm. Rad-mode for Angle er valgt.

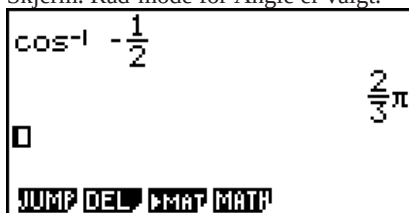


Bestem vinkel v når $\cos v = -\frac{1}{2}$.

Skjerm. Deg-mode for Angle er valgt.



Skjerm. Rad-mode for Angle er valgt.



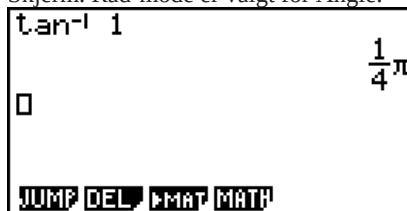


Bestem vinkel v når $\tan v = 1$.

Skjerm. Deg-mode er valgt for Angle.



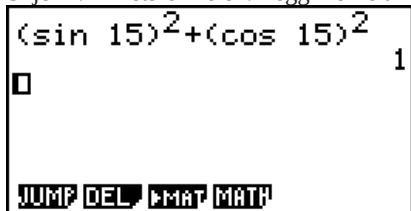
Skjerm. Rad-mode er valgt for Angle.



Bruk lommeregneren til å verifisere formlene nedenfor.

Enhetsformelen	$\sin^2 u + \cos^2 u = 1$	
Motsatte vinkler	$\sin(-u) = -\sin u$ $\cos(-u) = \cos u$ $\tan(-u) = -\tan u$	
Supplementvinkler	$\sin(180^\circ - u) = \sin u$ $\cos(180^\circ - u) = -\cos u$ $\tan(180^\circ - u) = -\tan u$	
Komplementvinkler	$\sin(90^\circ - u) = \cos u$ $\cos(90^\circ - u) = \sin u$	
Sum og differanse	$\sin(u \pm v) = \sin u \cdot \cos v \pm \cos u \cdot \sin v$ $\cos(u \pm v) = \cos u \cdot \cos v \mp \sin u \cdot \sin v$ $\tan(u \pm v) = \frac{\tan u \pm \tan v}{1 \mp \tan u \cdot \tan v}$	Av dette følger: $\sin 2u = 2 \sin u \cdot \cos u$ $\cos 2u = \cos^2 u - \sin^2 u$ $= 2 \cos^2 u - 1$ $= 1 - 2 \sin^2 u$ $\tan 2u = \frac{2 \tan u}{1 - \tan^2 u}$

Skjerm. Enhetsformelen. Legg merke til parentesene.



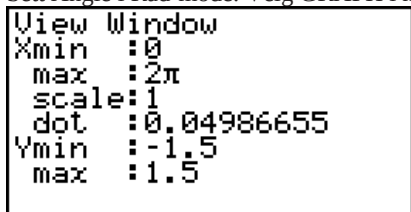
Sjekk de andre formlene på egen hånd.

5.4 Trigonometriske funksjoner og grafer

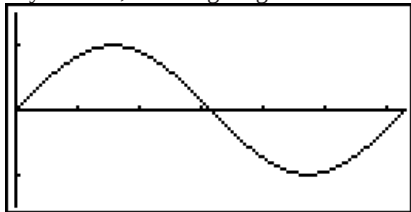


Tegn grafen til funksjonen f gitt ved $f(x) = \sin x$ der $x \in [0, 2\pi]$

Sett Angle i Rad-mode. Velg GRAPH i hovedmenyen. Juster grafvinduet slik.



Trykk EXE, EXIT og velg DRAW ved å trykke F6.

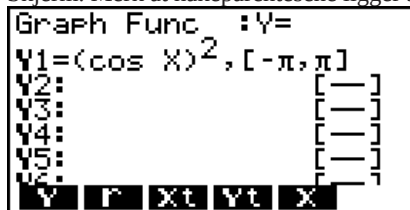


Øv på egen hånd med å bestemme ekstremalpunkter og nullpunkter. Bruk G-Solv.

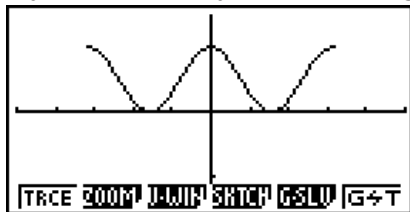


Tegn grafen til g gitt ved $g(x) = \cos^2(x)$ der $x \in [-\pi, \pi]$.

Skjerm. Merk at hakeparentesene ligger som SHIFT på + og –



Skjerm. Siden definisjonsområdet er valgt, vil vi kun se grafen i området $x \in [-\pi, \pi]$

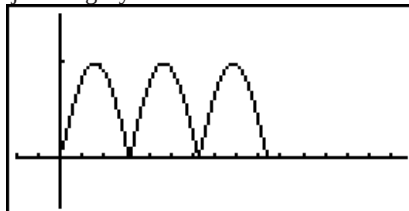
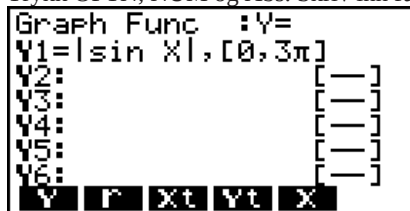


Merk. Rad-mode.



Tegn grafen til h der $h(x) = |\sin x|$ og der $x \in [0, 3\pi]$

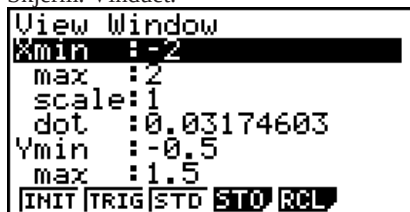
Trykk OPTN, NUM og Abs. Skriv inn funksjonen og trykk DRAW.



Regn ut arealet til området som er avgrenset av x -aksen og grafen til f gitt ved

$$f(x) = \cos x \text{ der } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

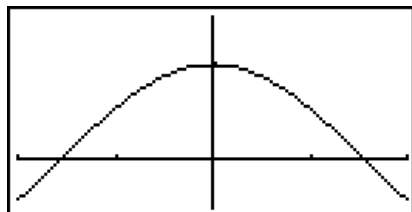
Skjerm. Vinduet.



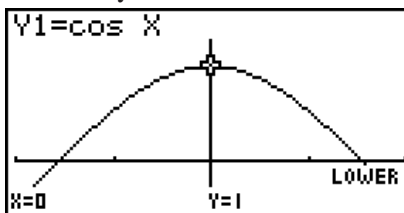
Skjerm. Skriv inn funksjonen.



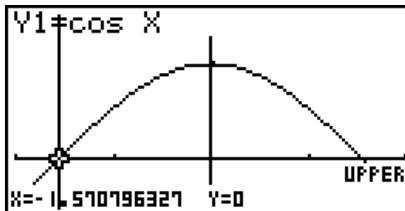
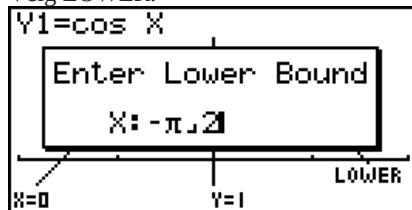
Velg DRAW ved å trykke F6.



G-Solv og $\int dx$ gir.



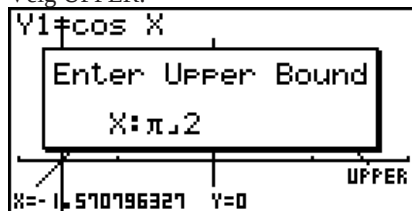
Velg LOWER.



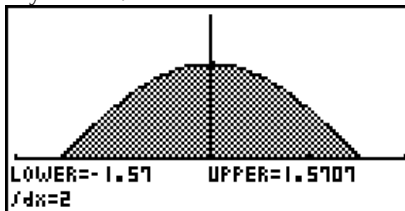
Anbefaling:

Ikke bruk piltast for å bestemme UPPER. Trykk direkte på verdien til den øvre grensen.

Velg UPPER.

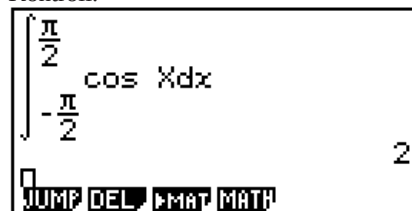


Trykk EXE.



Arealet av det avgrensede området er lik 2.

Kontroll.





Et sommerdøgn i juli ble utetemperaturen målt. Målingene ble foretatt annenhver time. Temperaturen er målt i celsiusgrader ($^{\circ}\text{C}$), og x er antall timer etter midnatt.

x	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
Utetemperatur	20,3	18,6	18,0	18,6	20,4	22,5	24,8	26,4	27,0	26,4	24,8	22,5	20,3

Finn et funksjonsuttrykk som passer til de målte temperaturene. Tegn grafen.

Legg timene inn i List 1 ved å bruke Seq.

```
Seq(X,X,0,24,2)→List1
{0,2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,24}→List2
0
```

List L1 Dim Fill Seq

Gå inn i STAT. Legg temperaturene inn i List 2.

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	0	20.3		
2	2	18.6		
3	4	18		
4	6	18.6		
				20.3

GRAPH CALC TEST DISTR

Velg CALC ved å trykke F2.

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	0	20.3		
2	2	18.6		
3	4	18		
4	6	18.6		
				20.3

1VAR 2VAR REG SET

Velg REG ved å trykke F3. Trykk deretter F6.

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	0	20.3		
2	2	18.6		
3	4	18		
4	6	18.6		
				20.3

Log EXP Pwr Sin Lst

Velg Sin ved å trykke F4.

```
SinReg
a =4.48992954
b =0.26155469
c =-2.6124345
d =22.525416
MSe=1.9549E-03
y=a·sin(bx+c)+d
```

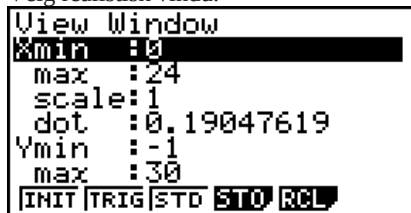
COPY

Funksjonen $Y = 4,5\sin(0,26X - 2,61) + 22,53$ beskriver temperaturutviklingen i løpet av dette døgnet.

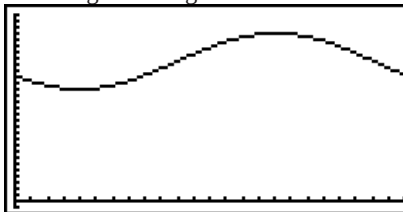
Velg COPY ved å trykke F6. Gå til GRAPH. Rund av parametrene.

```
Graph Func :Y=
Y1 4.5sin (0.26X[-])
Y2:
Y3:
Y4:
Y5:
Y6:
SEL DEL TVAR STWL MMEM DRAW
```

Velg realistisk vindu.



DRAW gir denne grafen.



Når et fly faller ned i en luftlomme, begynner vingespissen å vibrere. Utslaget til vingespissen etter t sekunder er gitt ved

$$f(t) = 6e^{-0,6t} \cdot \sin(\pi t), \text{ der } f(t) \text{ er målt i centimeter.}$$

Tegn grafen til f og bestem det maksimale utslaget til vingespissen.

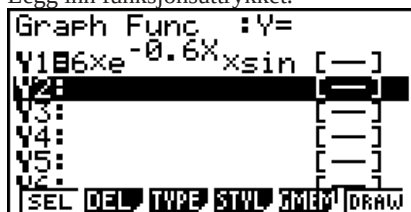
Løsning:

Still lommeregneren i RAD-mode.

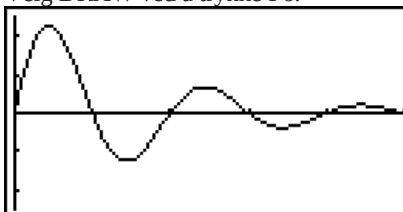
Velg følgende vindu: Xmin: 0, Xmax: 5, Ymin: -5 og Ymax: 5.

Førsteaksen viser tiden i sekunder. Andreaksen viser vingeutslaget i centimeter.

Legg inn funksjonsuttrykket.



Velg DRAW ved å trykke F6.



G-Solv og MAX gir.



Maksimalt utslag inntreffer etter 0,44 sekunder og er omtrent 4,5 cm.

5.5 Trigonometriske likninger

Grunnlikningene med sinus, cosinus og tangens har disse generelle løsningene i radianer:

$$\cos u = a \text{ gir } \begin{cases} u = u_0 + n \cdot 2\pi \\ u = -u_0 + n \cdot 2\pi \end{cases}$$

$$\sin u = b \text{ gir } \begin{cases} u = u_0 + n \cdot 2\pi \\ u = (\pi - u_0) + n \cdot 2\pi \end{cases}$$

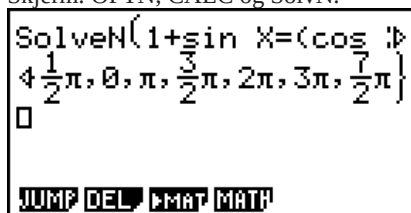
$$\tan u = c \text{ gir } u = u_0 + n \cdot \pi$$

hvor u_0 er løsningen du får på lommeregneren.



Løs likningen: $1 + \sin x = \cos^2 x$ der $x \in [0, 2\pi]$

Skjerm. OPTN, CALC og SolvN.

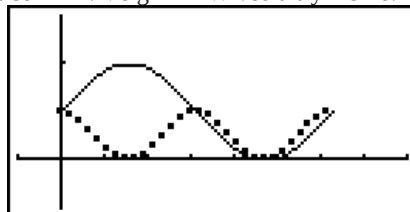


Hele uttrykket: $\text{SolveN}(1+\sin X=(\cos X)^2)$

Løsning: $x = 0$, $x = \pi$ og $x = \frac{3\pi}{2}$.

Grafisk løsning – alternativ I:

Legg inn venstre side som Y1 og høyre side som Y2. Velg DRAW ved å trykke F6.



G-Solv og ISCT gir.



Trykk pil mot høyre.



Trykk pil mot høyre.



Den grafiske løsningen bekrefter den algebraiske løsningen.

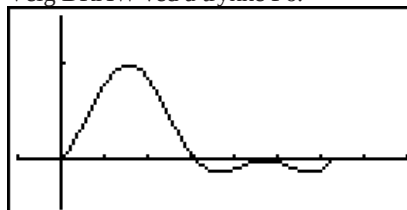
Grafisk løsning – alternativ II:

Likningen omformes til: $1 + \sin x - \cos^2 x = 0$ der $x \in [0, 2\pi)$.

Legg venstre side inn som Y1.

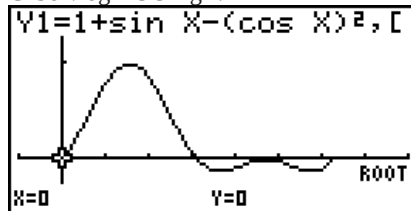


Velg DRAW ved å trykke F6.

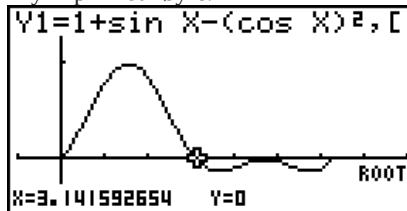


Hele uttrykket er $1 + \sin X - (\cos X)^2, [0, 2\pi]$.

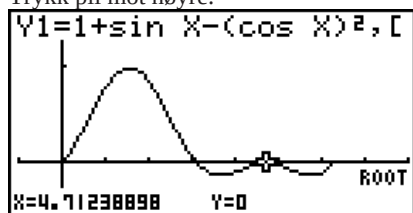
G-Solv og ROOT gir.



Trykk pil mot høyre.



Trykk pil mot høyre.



Merk at $x = 2\pi$ ikke er en løsning siden $x \in [0, 2\pi)$.

6. Kombinatorikk, sannsynlighet og statistikk

6.1 Ordnet utvalg med tilbakelegging

Ordnet utvalg med tilbakelegging	$N = n^r$	Vi trekker r elementer fra n elementer med tilbakelegging. Rekkefølgen har betydning.
----------------------------------	-----------	---



Vi trekker 3 elementer med tilbakelegging ut av en forekomst på 12 elementer. Hvor mange ordnede utvalg kan vi få?

Skjerm.



Antall ordnede utvalg med tilbakelegging er 1728.

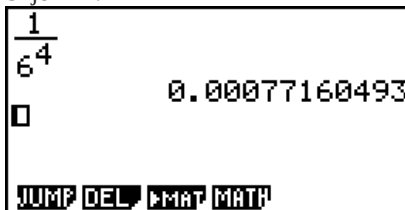


Hvor stor er sannsynligheten for å få yatzy i ett kast?

Skjerm 1.



Skjerm 2.



Sannsynligheten er 0,077 %.

6.2 Ordnet utvalg uten tilbakelegging

Ordnet utvalg uten tilbakelegging	${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$	Vi trekker r elementer fra n elementer uten tilbakelegging. Rekkefølgen har betydning.
-----------------------------------	-------------------------------	--



Bestem antall muligheter for å trekke 5 kort ut av en samling på 13 kort, når vi tar hensyn til rekkefølgen (permutasjoner) på de 5 kortene vi trekker ut.

OPTN og F6 gir.



Velg PROB ved å trykke F3.



Velg nPr ved å trykke F2. Trykk pil mot venstre for å plassere markøren foran P.



Skriv inn 13P5 og trykk EXE.



Svar: Antall muligheter er 154 440.

Kontroll:



Fakultet finner vi til venstre for nPr.

6.3 Uordnet utvalg uten tilbakelegging

Uordnet utvalg uten tilbakelegging	${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$	Vi trekker r elementer fra n elementer uten tilbakelegging. Rekkefølgen har ingen betydning.
---------------------------------------	---------------------------------	--



Bestem antall muligheter for å trekke 5 kort ut av en samling på 13 kort, når vi ikke tar hensyn til rekkefølgen på de 5 kortene vi trekker ut.

OPTN, F6 og PROB gir.



Velg nCr ved å trykke F3. Skriv inn 13C5.



Svar: Antall muligheter er 1287.

Kontroll:



6.4 Binomiske forsøk

Vi skal nå se på forsøk som blir gjentatt n ganger. Hvert enkelt forsøk har bare to mulige utfall, kalt suksess og ikke suksess. Sannsynligheten for suksess er den samme i hvert enkelt forsøk. Utfallene av de ulike forsøkene er uavhengige. Dette kaller vi binomiske forsøk.

Binomiske forsøk Sannsynligheten for at en suksess inntreffer x ganger av n	$P(X = x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1 - p)^{n-x}$ $x = 0, 1, 2, 3, \dots, n$	Antall uavhengige forsøk er n . p er den konstante sannsynlighet for suksess. Antall suksesser er x .
--	---	---



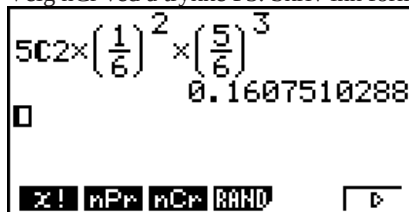
Vi kaster en vanlig terning 5 ganger. Hvor stor er sannsynligheten for å få to seksere?

Sannsynligheten for å få sekser er $\frac{1}{6}$. Det betyr at sannsynligheten for ikke å få sekser er $\frac{5}{6}$.

OPTN, F6 og PROB gir.



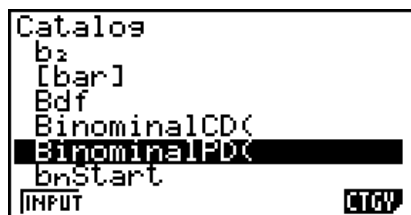
Velg nCr ved å trykke F3. Skriv inn formelen.



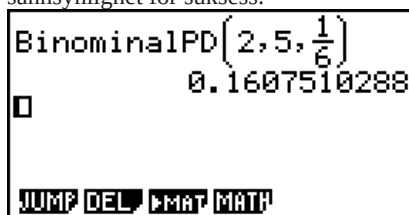
Sannsynligheten for å få to seksere er 0,16.

Alternativt:

Velg BinomialPD i Catalog.

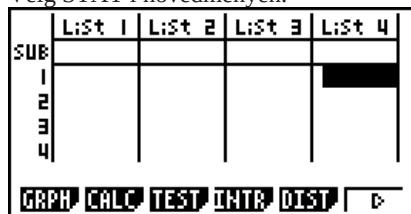


Skriv inn antall seksere, antall kast og sannsynlighet for suksess.

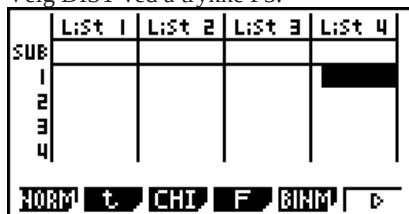


Alternativt.

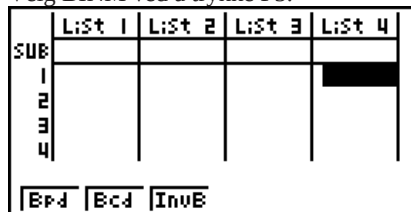
Velg STAT i hovedmenyen.



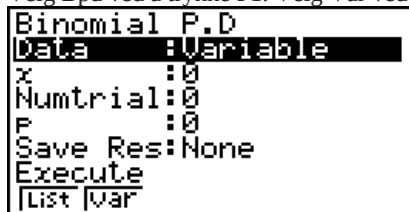
Velg DIST ved å trykke F5.



Velg BINM ved å trykke F5.



Velg Bpd ved å trykke F1. Velg Var ved å trykke F2.



Skriv inn antall seksere, antall kast og sannsynlighet for suksess.

```
Binomial P.D
Data      :Variable
x         :2
Numtrial:5
P         :1.6
Save Res:None
Execute
```

Marker Execute og trykk EXE.

```
Binomial P.D
P=0.16075102
```

Sannsynligheten for å få to seksere er 0,16.



Vi kaster en vanlig terning 5 ganger. Hvor stor er sannsynligheten for å få minst to seksere?

BinomialCD finner vi i Catalog.

```
1-BinomialCD(1,5,1/6)
0.196244856
□
DEL L DEL R
```

$\text{BinomialCD}(1,5,\frac{1}{6})$ gir sannsynligheten for 0 eller 1 sekser i 5 kast.

Sannsynligheten for minst to seksere er derfor

$$1 - \text{BinomialCD}(1,5,\frac{1}{6}).$$

Alternativt:

Regn ut $\sum_{x=2}^5 5Cx \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^x \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{5-x}$ på lommeregneren og se om du får samme svar som ovenfor.

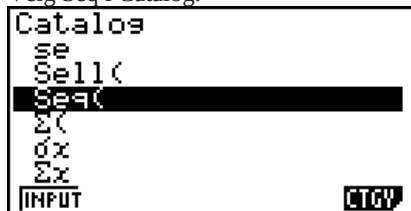


Vi kaster en vanlig terning 72 ganger.

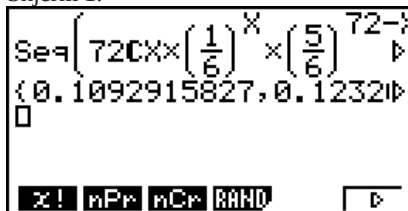
Hvor stor er sannsynligheten for å få mellom 10 og 14 seksere?

Vi skal altså bestemme $P(10 \leq X \leq 14)$ der X er antall seksere.

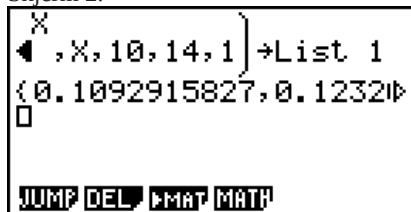
Velg Seq i Catalog.



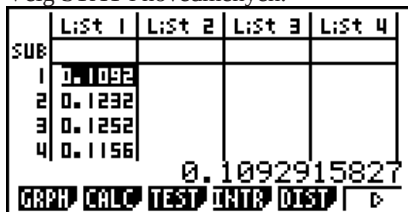
Skjerm 1.



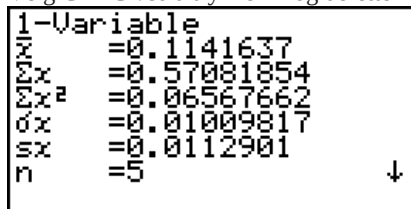
Skjerm 2.



Velg STAT i hovedmenyen.



Velg CALC ved å trykke F2 og deretter 1VAR ved å trykke F1.



Sannsynligheten $P(10 \leq X \leq 14) = 0,57$.

6.5 Binomisk fordeling

Vi kaster en mynt 50 ganger. La X være antall ganger vi får krone. Sannsynlighetsfordelingen til X blir en binomisk fordeling. Sannsynligheten for suksess er nøyaktig $p = 0,5$. Enten får vi krone eller mynt i et kast.



Framstill sannsynlighetsfordelingen i forsøket ovenfor.

Legg utfallsrommet inn i List 1. Skjerm 1.

```
Seq(X,X,0,50,1)→List1
List Result
[ ]
List L→M Dim Fill Seq [ ]
```

Skjerm 2.

```
◀X,X,0,50,1)→List 1
List Result
[ ]
List L→M Dim Fill Seq [ ]
```

Legg punktsannsynlighetene for å få mynt fra 0 til 50 ganger inn i List 2. Vi merker oss at

$$P(X = x) = \binom{50}{x} \cdot 0,5^x \cdot 0,5^{50-x} = \binom{50}{x} \cdot 0,5^{50}$$

Skjerm 1.

```
Seq(50CXX×0.5^50,X,0,50)
List Result
[ ]
JUMP DEL ▶MAT MATH
```

Skjerm 2.

```
◀50,X,0,50,1)→List 2
List Result
[ ]
JUMP DEL ▶MAT MATH
```

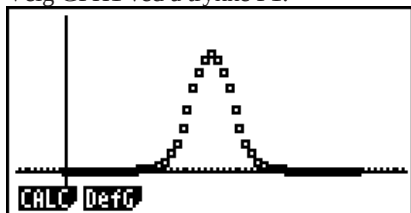
Velg STAT i hovedmenyen.

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	0	8E-16		
2	1	4E-14		
3	2	1E-12		
4	3	1E-11		
				0
GRAPH CALC TEST DATA DIST []				

Velg GRPH og deretter SET.

StatGraph1	
Graph Type	:Scatter
XList	:List1
YList	:List2
Frequency	:1
Mark Type	:□
[]	
[] [] []	

Velg GPH1 ved å trykke F1.



6.6 Hypergeometrisk fordeling

Hypergeometrisk fordeling	$P(X = x) = \frac{\binom{M}{x} \cdot \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	Populasjon med N elementer består av M spesielle.
X er antall spesielle i utvalget		Vi velger tilfeldig n elementer.



Vi har 10 hvite og 8 røde kuler i en eske og trekker 5 kuler helt tilfeldig. Hvor stor er sannsynligheten for å trekke 2 hvite og 3 røde kuler?

Formelen gir.

Kommandoen HypergePD gir.

Eller.



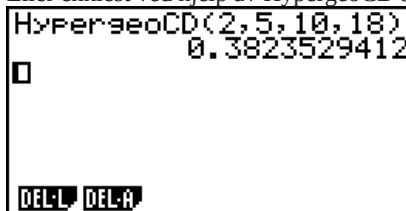
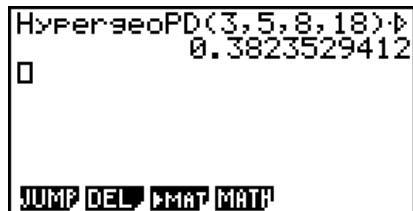
Vi har 10 hvite og 8 røde kuler i en eske og trekker 5 kuler helt tilfeldig. Hvor stor er sannsynligheten for å trekke minst 3 røde kuler?

Enten ved:
$$\sum_{x=3}^5 \frac{10C(5-x) \cdot 8Cx}{18C5}$$

eller:

$\text{HypergeoPD}(3,5,8,18) + \text{HypergeoPD}(4,5,8,18) + \text{HypergeoPD}(5,5,8,18)$

Eller enklest ved hjelp av HypergeoCD slik:



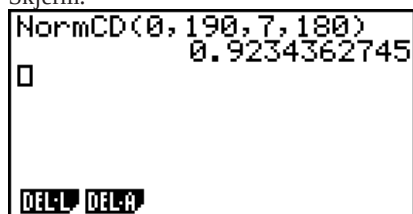
6.7 Normalfordeling



Et typisk eksempel på en normalfordeling er høyden til rekrutter. Blant norske rekrutter er forventningsverdien $\mu = 180$ cm og standardavviket $\sigma = 7$ cm.

Hvor stor del av norske rekrutter er lavere enn 190 cm?

Skjerm.



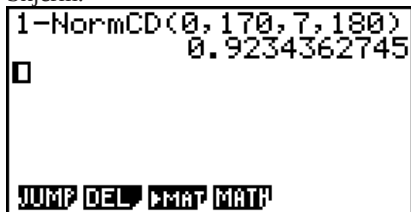
Omtrent 92,3 % av norske rekrutter er lavere enn 190 cm.



Hvor stor del av rekruttene er høyere enn 170 cm?

Når vi ved hjelp av NormCD har funnet hvor mange rekrutter som er lavere enn 170 cm, kan vi finne hvor stor del av rekruttene som er høyere enn 170 cm ved å regne ut $1 - P(X < 170)$.

Skjerm.

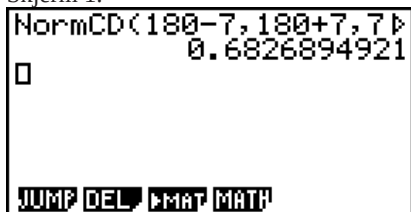


Vi merker oss det er like mange rekrutter som er høyere enn 170 cm enn som er lavere enn 190 cm. Hvorfor?

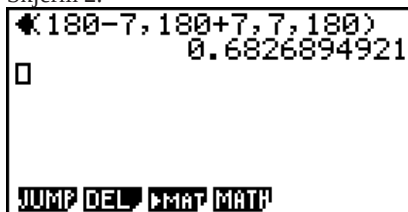


Hvor stor del av rekruttene befinner seg innenfor intervallet $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$, altså innenfor ett standardavvik til høyre og venstre for forventningsverdien på 180 cm.

Skjerm 1.



Skjerm 2.



Vi ser at omtrent 68,3 % av rekruttene ligger innenfor ett standardavvik på begge sider av forventningsverdien.

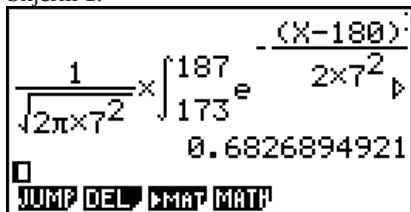
Det betyr at 68.3 % av rekruttene har en høyde mellom 173 cm og 187 cm.

Alternativt:

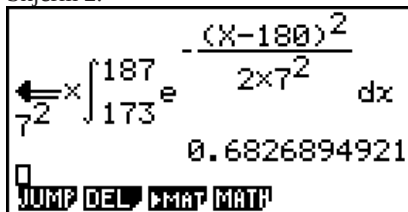
Vi kan også benytte normalfordelingsfunksjonen f gitt ved $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$ til å finne

sannsynligheter. La oss se hvordan vi finner sannsynligheten for at en tilfeldig valgt rekrutt har en høyde som avviker ett standardavvik fra forventningsverdien.

Skjerm 1.



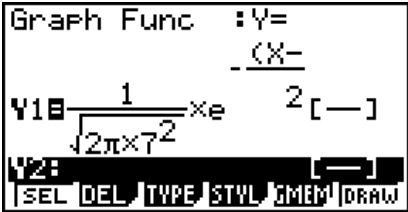
Skjerm 2.



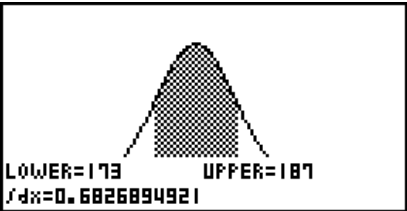
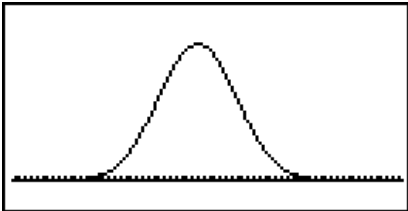
Vi får bekreftet at omtrent 68,3 % av rekruttene ligger innenfor ett standardavvik på begge sider av forventningsverdien.

Grafisk:

Legg inn normalfordelingsfunksjonen f gitt ved $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$



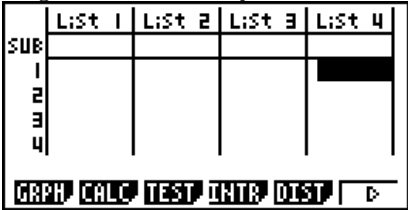
Integrer normalfordelingsfunksjonen fra 173 til 187.



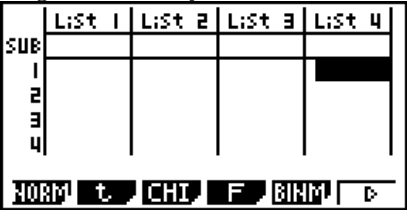
Samme svar som ovenfor.

Alternativt.

Velg STAT i hovedmenyen.



Velg DIST ved å trykke F5.



Velg Ncd ved å trykke F2. Velg Var ved å trykke F2.
Skriv inn dataene.

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1				
2				
3				
4				

Mod

Mod

InoN

```
Normal C.D
Data      :Variable
Lower     :173
Upper     :187
σ         :7
μ         :180
Save Res:None
List Var
```

```
Normal C.D
P      =0.68268949
z:Low=-1
z:Up  =1
```

6.8 Kurvedigram

Årstall	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Produksjon	13412	11760	10550	12300	14360	16200	16300	16100	18200	17250	17300



Framstill produksjonsutviklingen i denne perioden som et kurvediagram.

Årstallene fra 1995 til og med 2005 legger vi inn i List 1 ved hjelp av Seq.

Skjerm 1.

```
Seq(X,X,1995,2005,1)▶
(1995,1996,1997,1998▶
□
List L→M Dim Fill Seq | ▶
```

Skjerm 2.

```
◀1995,2005,1)→List 1
(1995,1996,1997,1998▶
□
List L→M Dim Fill Seq | ▶
```

Når vi går inn i STAT ser vi at årstallene ligger i rekkefølge i List 1. Tallene for produksjon må vi legge inn i List 2.

Skjerm.

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	1995	13412		
2	1996	11760		
3	1997	10550		
4	1998	12300		

GRAPH CALC TEST DMTD DIST | ▶

Velg GRPH ved å trykke F1. Velg SET ved å trykke F6. Sett Graph Type til xyLine.

```
StatGraph1
Graph Type :xyLine
XList      :List1
YList      :List2
Frequency  :1
Mark Type  :•
GPH1 GPH2 GPH3
```

Velg GPH1 ved å trykke F1.



6.9 Sortering av statistisk materiale



Hvilket år var oljeproduksjonen minst og hvilket år var produksjonen størst?

I et så begrenset tallmateriale som vi arbeider med her, er det mulig å finne dette uten hjelp av lommeregner. Men vi kan jo tenke oss at tallmaterialet var mye større. Da kan denne framgangsmåten komme til stor nytte.

Trykk EXIT og F6 til du får dette skjermbildet. Velg TOOL ved å trykke F1.

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	1995	13412		
2	1996	11760		
3	1997	10550		
4	1998	12300		
TOOL EDIT DEL DELA INS D				

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	1995	13412		
2	1996	11760		
3	1997	10550		
4	1998	12300		
SRTA SRTD TOP BTM				

Velg SRT-A ved å trykke F1.

SUB	Sort Lists Into Ascending Order How Many Lists?: 1			
SRTA SRTD TOP BTM				

Angi antall lister. Trykke EXE.

SUB	Sort Lists Into Ascending Order How Many Lists?: 2			
SRTA SRTD TOP BTM				

SRT-A betyr sortert i stigende rekkefølge.

Angi baseliste. Trykk EXE.

SUB	Select Base List List No: 2			
SRTA SRTD TOP BTM				

Velg den tilhørende listen. Trykk EXE.

SUB	Select Second List List No: 1			
SRTA SRTD TOP BTM				

Årstall og produksjon skal ikke skille lag, men holde sammen under sorteringen.

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	1997	10550		
2	1996	11760		
3	1998	12300		
4	1995	13412		
SRTA SRTD TOP BTM				

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
9	2004	17250		
10	2005	17300		
11	2003	18200		
12				
SRTA SRTD TOP BTM				

Oljeproduksjonen er minst i 1997 og størst i 2003.

6.10 Gjennomsnitt, median, kvartiler, typetall og variasjonsbredde

Gjennomsnitt Summen alle verdiene dividert på antall verdier	$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$ $\bar{x} = \frac{h_1 x_1 + h_2 x_2 + h_3 x_3 + \dots + h_p x_p}{n}$	Hvor $x_1, x_2, \dots$ er observerte verdier. Når verdien x_i forekommer h_i ganger i n observasjoner.
Gjennomsnitt i frekvensfordelinger	$\bar{x} = \frac{m_1 \cdot f_1 + m_2 \cdot f_2 + \dots + m_k \cdot f_k}{n}$	k intervaller med midtpunkt $m_1, m_2, \dots, m_k$ og tilhørende frekvenser $f_1, f_2, \dots, f_k$
Median	Den midterste verdien når datamaterialet er sortert i stigende orden.	Merk! Hvis antall observasjoner er et partall, er medianen gjennomsnittet av de to midterste verdiene.
Typetall	Verdien i datamaterialet som forekommer flest ganger.	
Variasjonsbredde	variasjonsbredde = høyeste verdi – laveste verdi	
Øvre kvartil	Verdien i et sortert datamateriale som deler observasjonsverdiene slik at 25 % har høyere verdi.	
Nedre kvartil	Verdien i et sortert datamateriale som deler observasjonsverdiene slik at 25 % har lavere verdi.	
Kvartilbredde	kvartilbredde = øvre kvartil – nedre kvartil	Kvartilbredden er ikke påvirket av de 25 % største eller minste verdiene. Kvartilbredden er derfor et godt spredningsmål, selv om verdiene i datamaterialet er skjevt fordelt.
Kvartilavvik	kvartilavvik = $\frac{\text{kvartilbredde}}{2}$	



Det ble gjort flere målinger av trafikkstøyen i en by. Følgende data (i dB) ble registrert

52,0 54,4 54,8 55,1 55,9 56,1 56,1 57,2 57,6 58,1 58,2 59,4
 59,4 59,9 60,6 60,7 61,1 61,3 62,1 62,3 63,0 63,4 63,7 63,9
 63,9 64,5 64,8 65,1 65,9 66,5 66,7 67,1 68,9 69,1 70,4 72,8

Bestem gjennomsnitt, median, øvre- og nedre kvartil, typetall og variasjonsbredde.

Legg dataene inn i List 1.

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	52			
2	54.4			
3	54.8			
4	55.1			

GRAPH CALC TEST INTR DIST D

Velg CALC ved på trykke F2.

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	52			
2	54.4			
3	54.8			
4	55.1			

1VAR 2VAR REG SET

Velg 1VAR ved å trykke F1.

1-Variable	
$\bar{x}$	=61.4057142
Σx	=2149.2
Σx^2	=132708.78
σx	=4.58450451
sx	=4.65143512
n	=35

↓

Gjennomsnitt er 61,4 dB.

Trykk pil nedover.

1-Variable	
minX	=52
Q1	=57.6
Med	=61.3
Q3	=64.8
maxX	=70.4
Mod	=56.1

↑
↓

Medianen er 61,3 dB.

Nedre kvartil er 57,6 dB og øvre kvartil er 64,8 dB.

Trykk pil nedover.

1-Variable	
Q3	=64.8
maxX	=70.4
Mod	=56.1
Mod	=59.4
Mod	=63.9
Mod:n	=3

↑
↓

Typetall er 56,1 dB, 59,4 dB og 63,9 dB.

Disse tre resultatene finnes flest ganger i datamaterialet.

Variasjonsbredden er differansen mellom høyeste og laveste verdi i datamaterialet.

1-Variable	
minX = 52	↑
Q1 = 57.6	
Med = 61.3	
Q3 = 64.8	
maxX = 70.4	
Mod = 56.1	↓

$$\max X - \min X = 70,4 - 52 = 18,4 \text{ dvs. } 18,4 \text{ dB}$$



På en matematikkprøve fikk elevene i en klasse følgende karakterer:

4 3 4 5 2 6 2 6 1 4 4 3 2 6 4 3 3 2 5 3 3 4 5 2 1

Finn gjennomsnitt, median og variasjonsbredde.

Legg karakterene inn i List 1 i STAT.

I denne oppgaven skal vi finne gjennomsnitt, median og variasjonsbredde i RUN-MAT.

Finn Mean og Median i Catalog.

Mean(List 1)	3.48
Median(List 1)	3
□	
JUMP DEL	RUN-MAT

Denne differansen gir variasjonsbredden.

Max(List 1)-Min(List 1)	5
□	
List L→M Dim Fill Seq	▢

6.11 Varians og standardavvik

Varians	$s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$ $\bar{x}$ er gjennomsnittsverdien	Et mål for spredningen sett i forhold til gjennomsnittet.
Standardavvik	$s = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$	Kvadratrot av variansen.

Standardavvik er et mål på hvor stor variasjon det er i det statistiske tallmaterialet vi behandler. Variabelen vi måler, kan vi kalle X . Da kaller vi ofte standardavviket for σ_x , $SD(x)$ eller s_x . Vi antar at vi har et sett målinger av verdien X . Disse kan vi kalle $x_1, x_2, \dots, x_n$. For å regne ut standardavviket må vi først regne ut gjennomsnittet $\bar{x}$ eller $\hat{\mu}_x$.

Formelen for å regne ut standardavviket er:
$$SD(x) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

Standardavviket er kvadratroten av variansen gitt ved
$$VAR(x) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

I vår formel for standardavvik har vi valgt å dividere med n . Noen ganger dividerer vi kvadratsummen med $n - 1$. Når vi dividerer kvadratsummen med n , finner vi standardavviket til en populasjon. Det såkalte utvalgsstandardavviket finner vi ved å dividere med $n - 1$. Hvis utvalget er stort, altså stor n , spiller det ikke så stor rolle om vi dividerer med n eller $n - 1$.

Lommeregneren skiller mellom populasjonsstandardavvik og utvalgsstandardavvik. Standardavvik for en populasjon skrives $x\sigma_n$, mens standardavvik for et utvalg skrives $x\sigma_{n-1}$.

Først skal vi foreta en del håndregning.



Honningproduksjon

En honningprodusent har 53 bikuber. For å gjøre tabellen mer praktisk har birøkteren delt materialet inn i klasser. Vi skal altså behandle såkalt klassedelt materiale. Tabellen nedenfor viser blant annet honningproduksjonen i kilogram per bikube i løpet av en sesong.

Det er ikke mulig å finne den nøyaktige gjennomsnittsvekten ut fra tallene i tabellen, men vi kan finne en tilnærmet riktig gjennomsnittsverdi ved hjelp av klassemidtpunktene. Klassemidtpunktet er gjennomsnittet av nedre og øvre verdi i intervallet. Vi antar at alle bikubene i en klasse, veier akkurat dette midtpunktet. Vi får følgende tabell:

Vekt [kg]	Frekvens f	Klassemidtpunkt x_m	Klassesum $f \cdot x_m$	Kvadratisk avvik $f \cdot (x_m - \bar{x})^2$
[10,20>	15	15	225	6615
[20,30>	7	25	175	847
[30,40>	10	35	350	10
[40,50>	8	45	360	648
[50,60>	7	55	385	2527
[60,70>	4	65	260	3364
[70,100>	2	85	170	4802
Sum	53		1925	18813

Før vi kan fylle inn verdien i siste kolonne må vi ha regnet ut gjennomsnittet. Vi finner gjennomsnittet ved
$$\bar{x} = \frac{f \cdot x_m}{n} = \frac{1925}{53} \approx 36$$
, det vi si tilnærmet 36 kg.

$$\text{Standardavviket: } x\sigma_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{18813}{53}} = 18,84, \text{ det vil si } 18,84 \text{ kg.}$$

Hvordan kan vi bruke lommeregneren som et nyttig verktøy i denne problemstillingen?
Vi ønsker selvfølgelig å kunne mate lommeregneren med vektclassene og frekvensen – for deretter å la lommeregneren ta seg av det tidkrevende regnearbeidet.

Men hvordan skal lommeregneren finne klassemidtpunktene?

Vi legger nedre grense for klassene inn i List 1 og øvre grense inn i List 2. Frekvensene legger vi i List 3. Så legger vi formelen $\frac{\text{List 1} + \text{List 2}}{2}$ inn i List 4. Det betyr at List 4 vil komme til å inneholde klassemidtpunktene.

Skjerm1.

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	10	20	15	
2	20	30	7	
3	30	40	10	
4	40	50	8	

Skjerm 2.

```
(List 1+List 2)÷2÷Li
{15,25,35,45,55,65,8}
□
List L→M Dim Fill Seq
```

Skjerm 3.

```
◀ 1+List 2)÷2÷List 4
{15,25,35,45,55,65,8}
□
List L→M Dim Fill Seq
```

Velg følgende SET for 1 Var

```
1Var XList :List4
1Var Freq :List3
2Var XList :List1
2Var YList :List2
2Var Freq :1
LIST
```

Trykk EXIT og F1.

```
1-Variable
x̄ =36.3207547
Σx =1925
Σx² =88725
σx =18.8377116
sx =19.0179809
n =53 ↓
```

Lommeregneren bekrefter at gjennomsnittet $\bar{x} = 36,32$ og at standardavviket $x\sigma_n = 18,84$.

6.12 Forventning, varians og standardavvik for en stokastisk variabel X

Forventningsverdien: $\mu = E(X) = \sum x \cdot P(X = x)$

Variansen: $VAR(X) = \sum (x - E(X))^2 \cdot P(X = x)$

Standardavviket: $\sigma = \sqrt{VAR(X)}$

I en binomisk fordeling er $E(X) = np$ og $VAR(X) = np(1 - p)$

Regneregler for forventning og varians:

$$E(a + bX) = a + b \cdot E(X)$$

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

$$VAR(a + bX) = b^2 \cdot VAR(X)$$

Dersom X og Y er uavhengige, gjelder: $VAR(X + Y) = VAR(X) + VAR(Y)$



Tabellen viser sannsynlighetsfordelingen til X .

x	2	3	4	5	6	7	8
$P(X=x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

Regn ut $E(X)$ og $VAR(X)$.

Legg sannsynlighetsfordelingen inn i Lister.

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	2	0.0625		
2	3	0.125		
3	4	0.1875		
4	5	0.25		
TOOL EDIT DEL DELA INS D				

Neste skjerm viser hvordan vi kan regne med lister.

Legg produktet av List 1 og List 2 inn i List 3. Sum List 3 gir forventningsverdien $E(X)$.

List 1×List 2→List 3	
{0.125,0.375,0.75,1.}	
Sum List 3	5
□	
JUMP DEL ▶MAT MATH	

Skjerm.

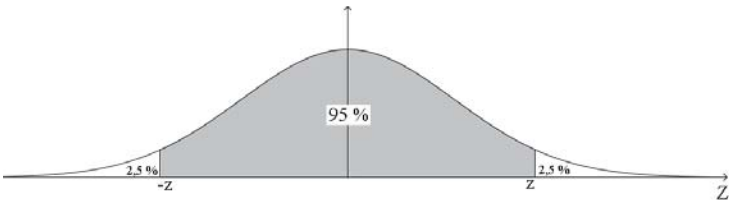
```
(List 1-5)^2×List 2→L4
{0.5625,0.5,0.1875,0}
Sum List 4
2.5
□
DEL DELA
```

Variansen $VAR(X) = 2,5$.

Vi sparer oss for mye regnearbeid ved å regne med lister på denne måten.

6.13 Konfidensintervall

Konfidens
Konfidens på k % mellom -z og z: $P(-z < Z < z) = k \%$



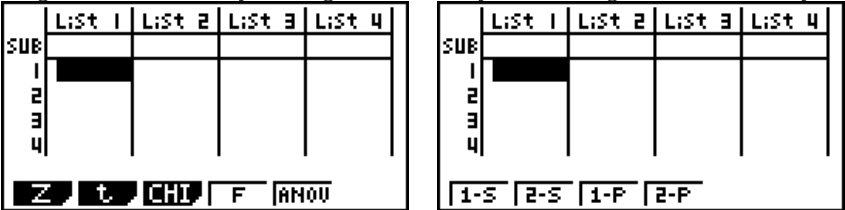
I et 95 % konfidensintervall er $z = 1,96$. Finnes ved å slå opp $P(Z < z) = 0,975$ i normalfordelingstabellen.

Konfidensintervall	Et p % -konfidensintervall for forventningsverdien μ $\left[\bar{X} - z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$	Det er p % sannsynlighet for at forventningsverdien μ er innenfor dette intervallet
Konfidensintervall for andelen p	$\left[\hat{p} - z \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right]$ Gjelder når $n\hat{p} \geq 5$ og $n(1-\hat{p}) \geq 5$	p er estimert med $\hat{p} = \frac{X}{n}$



Et måleresultat er normalfordelt med forventningsverdi 24 og standardavvik 6. Bestem et 80 % konfidensintervall for verdien når vi foretar en enkelt måling.

Velg STAT i hovedmenyen. Velg INTR ved å trykke F4. Velg deretter Z ved å trykke F1.



Velg 1-S ved å trykke F1. Velg Var ved å trykke F2. Skriv inn C-level og de øvrige fakta.

```
1-Sample ZInterval
Data :Variable
C-Level :0.8
σ :6
x̄ :24
n :1
Save Res:None
List Var ↓
```

Gå med pil nedover til Execute. Trykk EXE.

```
1-Sample ZInterval
Left =16.3106906
Right=31.6893094
x̄ =24
n =1
```

Konfidensintervallet ligger mellom 16,3 og 31,7.

Hva skjer med øvre og nedre grenseverdi for intervallet nå vi øker C-level til 95 %?

Sjekk selv.

```
1-Sample ZInterval
C-Level :0.95 ↑
σ :6
x̄ :24
n :1
Save Res:None
Execute
ICALC
```

Undersøk også hva som skjer med konfidensintervallet når n øker.



Hvor mange målinger må vi foreta for at intervallet $[23,25]$ skal være et 95 % konfidensintervall for gjennomsnittet i stikkprøven?

Vi kan prøve oss fram med ulike verdier for n . Når $n = 138$ får vi følgende intervall:

```
1-Sample ZInterval
C-Level :0.95 ↑
σ :6
x̄ :24
n :138
Save Res:None
Execute
ICALC
```

```
1-Sample ZInterval
Left =22.9989407
Right=25.0010593
x̄ =24
n =138
```

Altså veldig nært $[23,25]$.

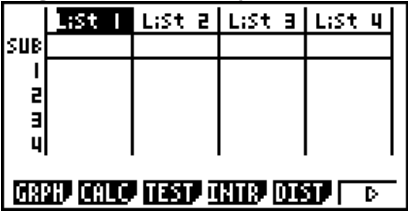
6.14 Hypotesetesting

Hypotesetest		
Undersøker om sannsynligheten p i en binomisk fordeling eller om forventningsverdien μ i en normalfordeling har en bestemt verdi.		
	Binomisk:	Normalfordeling:
Venstresidig test	Nullhypotese H_0 : $p = p_0$ Mothypotese H : $p < p_0$ Regn ut fra H_0 P -verdi: $P(X \leq x)$	Nullhypotese H_0 : $\mu = \mu_0$ Mothypotese H : $\mu < \mu_0$ Regn ut fra H_0 P -verdi: $P(\bar{X} \leq \bar{x})$
Høyresidig test	Nullhypotese H_0 : $p = p_0$ Mothypotese H : $p > p_0$ Regn ut fra H_0 P -verdi: $P(X \geq x)$	Nullhypotese H_0 : $\mu = \mu_0$ Mothypotese H : $\mu > \mu_0$ Regn ut fra H_0 P -verdi: $P(\bar{X} \geq \bar{x})$
Tosidig test	Nullhypotese H_0 : $p = p_0$ Mothypotese H : $p \neq p_0$ Regn ut fra H_0 P -verdi: $2 \cdot P(X \leq x)$ eller $2 \cdot P(X \geq x)$	Nullhypotese H_0 : $\mu = \mu_0$ Mothypotese H : $\mu \neq \mu_0$ Regn ut fra H_0 P -verdi: $2 \cdot P(\bar{X} \leq \bar{x})$ eller $2 \cdot P(\bar{X} \geq \bar{x})$

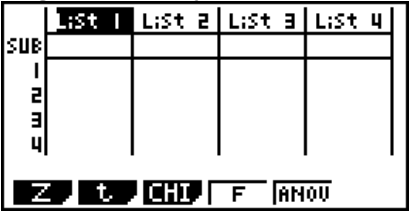


Mengden av et bestemt stoff i en pille skal være 260 mg med et standardavvik på 40 mg. I en stikkprøve med 15 piller viser det seg at de inneholder 242 mg i gjennomsnitt. Er dette for lite når vi setter signifikansnivået til 10 %?

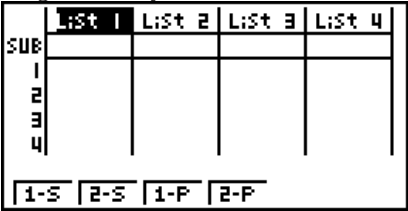
Velg STAT i hovedmenyen.



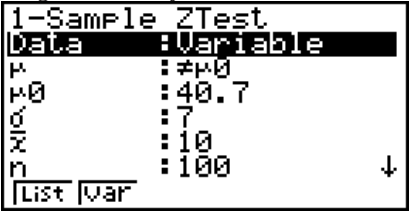
Velg TEST ved å trykke F3.



Velg Z ved å trykke F1.



Velg 1-S ved å trykke F1.



Velg Var ved å trykke F2. Legg inn opplysningene.

```
1-Sample ZTest
μ      :<μ₀      ↑
μ₀     :260
σ      :40
x̄       :242
n       :15
Save Res:None  ↓
None LIST
```

Nullhypotesen: Forventningsverdien er som påstått lik $\mu_0 = 260$ mg

Alternativ hypotese: Forventningsverdien $\mu < 260$ mg .

I øverste linje har vi altså valgt $\mu < \mu_0$.

Bruk pil nedover og marker Execute. Trykk EXE.

```
1-Sample ZTest
μ      <260
z      =-1.7428425
P      =0.04068056
x̄       :242
n       :15
```

Vi har observert et gjennomsnitt som er 1,7428 standardavvik under forventningsverdien i følge nullhypotesen. det er bare 4 % sannsynlighet for å finne en så lav verdi som 242 mg i en stikkprøve på 15 piller, dersom nullhypotesen er riktig. Med et signifikansnivå på 10 % må vi forkaste hypotesen.

Vi endrer gjennomsnittet til 246 mg.

```
1-Sample ZTest
μ₀     :260      ↑
σ      :40
x̄       :246
n       :15
Save Res:None
Execute
ICALC                                     DRAW
```

Siden $p = 0,0876$ må vi fortsatt forkaste hypotesen.

```
1-Sample ZTest
μ      <260
z      =-1.3555442
P      =0.08762212
x̄       :246
n       :15
```

Vi endrer gjennomsnittet til 247 mg.

```
1-Sample ZTest
μ₀     :260      ↑
σ      :40
x̄       :247
n       :15
Save Res:None
Execute
ICALC                                     DRAW
```

Siden $p = 0,1041$ må vi akseptere hypotesen.

```
1-Sample ZTest
μ      <260
z      =-1.2587196
P      =0.10406581
x̄       :247
n       :15
```

7. Tallfølger og rekker

7.1 Tallfølger og rekker. Rekursjon

En tallfølge er en serie av tall etter hverandre: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

Ledd nr. n i tallfølgen kan vi kalle a_n . Som regel har vi en formel for a_n uttrykt ved n .

I rekursive tallfølger er det en sammenheng mellom a_n og a_{n-1} .

Når vi summerer leddene i en tallfølge, får vi en rekke. Summen av de n første leddene kaller vi s_n der $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$.

7.2 Aritmetiske tallfølger og rekker

I en aritmetisk tallfølge er differansen mellom ett ledd og det foregående konstant.

$$a_n - a_{n-1} = d, \text{ dvs. } a_n = a_{n-1} + d$$

Størrelsen d kaller vi differansen i tallfølgen. Uttrykt ved hjelp av første ledd og differansen er det n -te leddet gitt ved:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d.$$

Når vi summerer leddene i en aritmetisk tallfølge, får vi en aritmetisk rekke. Summen s_n av de n første leddene i en aritmetisk rekke er gitt ved:

$$s_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$



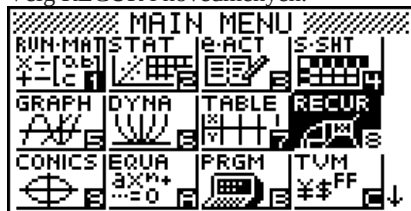
I en aritmetisk rekke er det første leddet lik 7 og differansen er lik 3.

a) Bestem a_5 .

b) Regn ut s_{10} .

a)

Velg RECUR i hovedmenyen.



Velg TYPE ved å trykke F3.



Velg an ved å trykke F1.

```
Select Type

F1: an=An+B
F2: an+1=An+Bn+C
F3: an+2=An+1+Bn+...

[an] [an+1] [an+2]
```

Skriv inn uttrykket.

```
Recursion
anB7+3×(n-1) [—]
bn: [—]
cn: [—]

[SEL] [DEL] TYPE [n] SET TABL
```

Velg SET ved å trykke F5. Legg inn Start og End.

```
Table Setting n
Start: 1
End : 20
```

Trykk EXE.

```
Recursion
anB7+3×(n-1) [—]
bn: [—]
cn: [—]

[SEL] [DEL] TYPE [n] SET TABL
```

Velg TABL ved å trykke F6.

n	an
1	7
2	10
3	13
4	16

FORM DEL 1 G-COM G-FLT

Bruk pil nedover til å markere $n = 5$.

n	an
2	10
3	13
4	16
5	19

FORM DEL 5 G-COM G-FLT

Svar: $a_5 = 19$

b)

Trykk SHIFT og SET UP. Sett $\sum$ Display til On. Trykk EXIT.

```
Input/Output: Math
[2] Display : On
Draw Type : Connect
Graph Func : On
Dual Screen : Off
Frac Result : d/c
Simul Graph : Off
[On] [Off]
```

```
Recursion
anB7+3×(n-1) [—]
bn: [—]
cn: [—]

[SEL] [DEL] TYPE [n] SET TABL
```

Velg TABL ved å trykke F6. Gå med pil nedover til $n = 10$.

n	Δn	$\Sigma \Delta n$
7	25	112
8	28	140
9	31	171
10	34	205

10
FORM DEL 7:CON G-PLT

Svar: $s_{10} = 205$

Kontroll 1 i RUN-MAT.

$7+3 \times 9$	34
$\frac{(7+34)}{2} \times 10$	205

0
JUMP DEL 7:MAT MATH

Kontroll 2 i RUN-MAT.

$\sum_{X=1}^{10} (7+(X-1) \times 3)$	205
--------------------------------------	-----

0
FMin FMaX $\Sigma()$ logab D

Vi kan også finne svarene ved å velge TYPE F2.

Select Type
F1: $a_n = A_n + B$
F2: $a_{n+1} = A a_n + B n + C$
F3: $a_{n+2} = A a_{n+1} + B a_n + \dots$

a_n a_{n+1} a_{n+2}

Legg inn at $a_{n+1} = a_n + d$

Recursion
$a_{n+1} = a_n + 3$
$b_{n+1} :$
$c_{n+1} :$

DEL DEL TYPE MATH SET TABL

Fortsett på egen hånd.

7.3 Geometriske tallfølger og rekker

I en geometrisk tallfølge er forholdet mellom ett ledd og det foregående konstant.

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}, \text{ dvs. } a_n = a_{n-1} \cdot k$$

Forholdet k kaller vi kvotienten i tallfølgen. Uttrykt ved hjelp av første ledd og kvotienten er det n -te leddet gitt ved:

$$a_n = a_1 \cdot k^{n-1}.$$

Når vi summerer leddene i en geometrisk tallfølge, får vi en geometrisk rekke. Summen s_n av de n første leddene i en geometrisk rekke er:

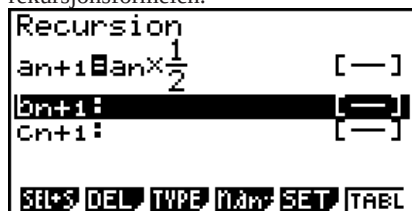
$$s_n = a_1 \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1}.$$



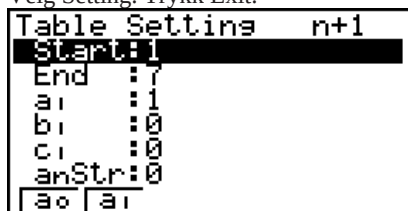
Vi har gitt den geometriske rekken $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$.

Regn ut summen.

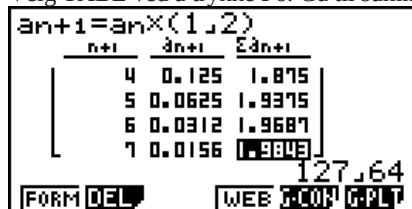
Velg TYPE F2 og legg inn rekursjonsformelen.



Velg Setting. Trykk Exit.

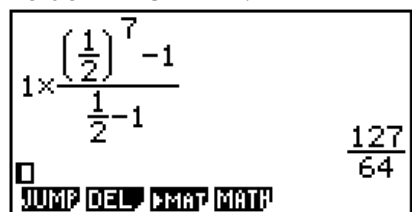


Velg TABL ved å trykke F6. Gå til summen av de syv leddene i den geometriske rekken.

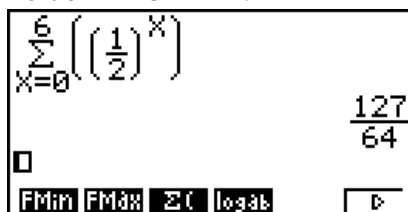


Svar: Summen er $\frac{127}{64}$.

Kontroll 1 i RUN-MAT.



Kontroll 2 i RUN-MAT.



7.4 Konvergente geometriske rekker

En uendelig geometrisk rekke ($a_1 \neq 0$) $a_1 + a_1 \cdot k + a_1 \cdot k^2 + \dots$
er konvergent dersom $-1 < k < 1$.

Summen av den uendelige rekken er da: $s = \frac{a_1}{1-k}$

Dersom den uendelige rekken ikke er konvergent, er den divergent. Summen av en divergent rekke eksisterer ikke.



Vi har gitt den uendelige geometriske rekken $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots$

Regn ut summen.

Lommeregneren regner ikke med uendelig.

Utrekningen nedenfor indikerer at den

uendelige summen konvergerer mot 2.

Calculator screen showing the summation of a geometric series: $\sum_{x=0}^{1000} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^x\right)$. The result is 2.

Eksakt sum. Merk at $k = \frac{1}{2}$.

Calculator screen showing the exact sum formula: $\frac{1}{1 - \frac{1}{2}}$. The result is 2.

Eller ved hjelp av Recursion.

Calculator screen showing the Recursion function: $\text{an}+1 \leftarrow \text{an} \times \frac{1}{2}$. The result is 2.

Her ser vi at summen konvergerer mot 2.

n+1	an+1	Σan+1
30	1.8E-9	1.9999
31	9E-10	1.9999
32	4E-10	2
33	2E-10	2

The result is 2.

7.5 Vilkaarlige tallfølger og rekker

I tallfølgen 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... er et ledd i følgen dannet av summen av de to foregående leddene. Denne tallfølgen kaller vi Fibonaccifølgen.

Startverdiene er $a_1 = 1$ og $a_2 = 1$.



Bruk lommeregneren til å beregne a_{20} i Fibonaccifølgen.

Velg F3 som TYPE.

```
Select Type

F1: an=A+B
F2: an+1=A+B+C
F3: an+2=A+B+C+...

[an] [an+1] [an+2]
```

Skriv inn at $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ etter å ha trykket F4.

```
Recursion
an+2=Aan+1 [—]
bn+2: [—]
cn+2: [—]

[n] [an] [an+1] [bn] [bn+1] [—]
```

Skjerm.

```
Recursion
an+2=Aan+1 [—]
bn+2: [—]
cn+2: [—]

[SEL] [DEL] [TYPE] [MATH] [SET] [TABL]
```

Velg SET ved å trykke F5. Skriv inn verdiene.

```
Table Settings n+2
Start:1
End :100
a1 :1
a2 :1
b1 :0
b2 :0
[a0] [a1]
```

Trykk EXE og velg TABL ved å trykke F6. Bruk pil nedover.

```

  n+2  3n+2
  [1]   [1]
  [2]   [1]
  [3]   [2]
  [4]   [3]

[FORM] [DEL] [G-COM] [G-FLT]
```

```

an+2=Aan+1
  n+2  3n+2
  [18] [2584]
  [19] [4181]
  [20] [6765]
  [21] [10946]

[FORM] [DEL] [G-COM] [G-FLT] 6765
```

I Fibonaccifølgen er $a_{20} = 6765$.



Bruk lommeregneren til å regne ut forholdet mellom s_{50} og s_{49} i Fibonaccirekken.

Etter å ha satt Sett Σ Display til On, får vi ut følgende tabell.

$n+2$	a_{n+2}	Σa_{n+2}
48	4.8E9	1.2E10
49	7.77E9	2E10
50	1.2E10	3.2E10
51	2E10	5.3E10
2.036501107E+10		

$n+2$	a_{n+2}	Σa_{n+2}
48	4.8E9	1.2E10
49	7.77E9	2E10
50	1.2E10	3.2E10
51	2E10	5.3E10
3.29512801E+10		

Vi går til RUN-MAT og regner ut $\frac{s_{50}}{s_{49}}$.

$(3.29512801 \times 10^{10}) \div (2.036501107 \times 10^{10})$	
1.618033989	
$\frac{(1+\sqrt{5})}{2}$	1.618033989

$\div (2.036501107 \times 10^{10})$	
1.618033989	
$\frac{(1+\sqrt{5})}{2}$	1.618033989

Vi ser at forholdet nærmer seg det gyldne snitt.

7.6 Fibonaccifølgen i regneark

Lommeregneren er utstyrt med et avansert regneark. I dette avsnittet ser vi på noen av de viktigste funksjonene.



- Legg inn de 50 første Fibonaccitallene i regnearket på lommeregneren.
- Regn ut s_{50} for Fibonaccirekken. Bruk regnearket på lommeregneren.
- Regn ut forholdet mellom to påfølgende Fibonaccitall.

a)
Velg S-SHT i hovedmenyen.

MAIN MENU			
RUN-MAT	STAT	E-ACT	S-SHT
$\times \div$	$\frac{\square}{\square}$	$\frac{\square}{\square}$	$\frac{\square}{\square}$
GRAPH	DYNA	TABLE	RECUR
$\frac{\square}{\square}$	$\frac{\square}{\square}$	$\frac{\square}{\square}$	$\frac{\square}{\square}$
CONICS	EQUA	PRGM	TVM
$\frac{\square}{\square}$	$\frac{\square}{\square}$	$\frac{\square}{\square}$	$\frac{\square}{\square}$

Velg Edit ved å trykke F2.

SHEET	A	B	C	D
1				
2				
3				
4				
5				

Velg SEQ ved å trykke F5.

SHEET	A	B	C	D
1				
2				
3				
4				
5				

CUT COPY CELL JUMP SEQ D

Legg inn data.

Sequence
Expr :
Var :
Start :
End :
Incre :
1st Cell:A1

EXE

Velg EXE ved å trykke F6.

Sequence
Expr :X
Var :X
Start :1
End :50
Incre :1
1st Cell:A1

EXE

Alle hele tall fra 1 til 50 ligger i kolonne A.

SHEET	A	B	C	D
1	1			
2	2			
3	3			
4	4			
5	5			

CUT COPY CELL JUMP SEQ D

Gå til kolonne B. Trykk EDIT og F6.

SHEET	A	B	C	D
1	1			
2	2			
3	3			
4	4			
5	5			

FILL SRT-A SRT-D D

Skriv inn de to første Fibonaccitallene.

SHEET	A	B	C	D
1	1	1		
2	2	1		
3	3			
4	4			
5	5			

ROW COL ALL

Velg FILL ved å trykke F1.

Fill
Formula :
Cell Range:B1:B1

EXE

Skriv inn formelen og celleområdet.

Fill
Formula :=B1+B2
Cell Range:B3:B50

EXE

Velg EXE ved å trykke F6.

SHEET	A	B	C	D
1	1	1		
2	2	1		
3	3	2		
4	4	3		
5	5	5		

=B3+B4

FILL SRT-A SRT-D D

Fibonaccitallene ligger i kolonne B.

SHEET	A	B	C	D
9	9	34		
10	10	55		
11	11	89		
12	12	144		
13	13	233		

=B7+B8

FILL SRT-A SRT-D D

b)

Vi plasserer summen av Fibonaccirekken i kolonne C.

SHEET	A	B	C	D
1	1	1	1	
2	2	1		
3	3	2		
4	4	3		
5	5	5		

FILL SRTA SRTD D

Fill
Formula :=C1+B2
Cell Range:C2:C50

EXE

EXE gir.

SHEET	A	B	C	D
1	1	1	1	
2	2	1	2	
3	3	2	4	
4	4	3	7	
5	5	5	12	

=C4+B5

FILL SRTA SRTD D

SHEET	A	B	C	D
46	46	1.83E9	4.8E9	
47	47	2.97E9	7.77E9	
48	48	4.8E9	1.2E10	
49	49	7.77E9	2E10	
50	50	1.2E10	3.2E10	

=C49+B50

FILE EDIT DEL INS CLR D

Svaret finner vi i celle C50.

c)

I kolonne D skriver vi ut forholdet mellom to påfølgende Fibonacci tall.

SHEET	A	B	C	D
1	1	1	1	1
2	2	1	2	
3	3	2	4	
4	4	3	7	
5	5	5	12	

FILE EDIT DEL INS CLR D

Fill
Formula :=B2÷B1
Cell Range:D2:D50

EXE

Skjerm.

SHEET	A	B	C	D
13	13	233	609	1.618
14	14	377	986	1.618
15	15	610	1596	1.618
16	16	987	2583	1.618
17	17	1597	4180	1.618

=B17÷B16

FILL SRTA SRTD D

Forholdet mellom to påfølgende Fibonacci tall nærmer seg det gyldne snitt.

8. Tall

8.1 Store tall. Sum og fakultet

La oss starte med den velkjente historien om oppfinnelsen av sjakkspillet.

Herskeren av India ble meget begeistret over oppfinnelsen av sjakkspillet som ble gjort av en av de vise menn i herskerens palass. Herskeren proklamerte at vismannen selv kunne velge belønning for oppfinnelsen. Oppfinneren av sjakkspillet var en dyktig matematiker. Han foreslo for sin herre at han gjerne ville ha ett riskorn i den første ruten på sjakkbrettet, det doblete antall riskorn i neste rute og så videre med dobling av antall riskorn for hver rute utover på brettet i de neste 62 rutene på sjakkbrettet.

Herskeren syntes dette var en beskjeden belønning. Han beordret sine tjenere til å skaffe riskornene og oppfylle vismannens ønske. Men herskeren ble svært forbauset over hvor fort sjakkbrettet ble dekket av riskorn og hvor fort det gikk før hele palasset var fylt. Antall riskorn i siste rute på sjakkbrettet kan vi skrive som "2 opphøyd i 63" eller som 2^{63}



Hvor mange riskorn blir det til sammen?

Vi summerer antall riskorn i alle de 64 rutene på sjakkbrettet. Da får vi

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63} = \sum_{n=0}^{63} 2^n$$

Gå inn i RUN-MAT og velg OPTN.



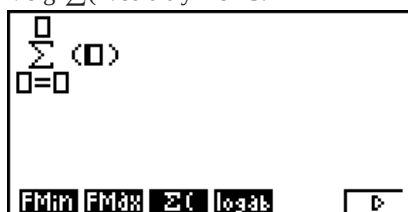
Velg CALC ved å trykke F4.



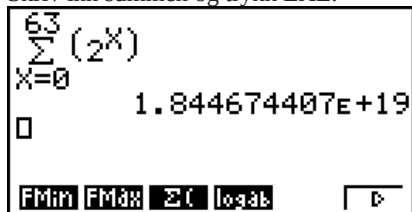
Trykk F6.



Velg $\Sigma($ ved å trykke F3.

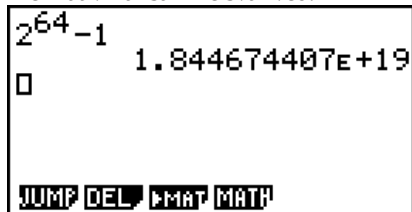


Skriv inn summen og trykk EXE.



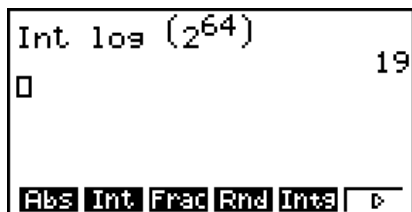
Dette tallet har 20 siffer.

Merk at vi får samme svar ved.



Hvorfor?

Hvis vi ønsker å få svar på hvor mange siffer $2^{64} - 1$ har, kan vi utføre følgende utregning.



Du finner Int ved OPTN, F6, NUM (F4).

Int gir heltallsverdien. Siden alle funksjoner og kommandoer ligger i Catalog, kan du også finne Int der.

Vi ser at svaret gir 1 mindre enn antall siffer.

Vi kan også presentere store tall ved hjelp av fakultetsfunksjonen på lommeregneren. Vi husker at

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n.$$

Gå inn i RUN-MAT.



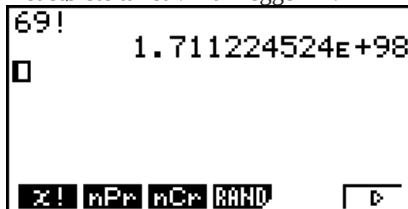
Trykk OPTN og F6.



Velg PROB ved å trykke F3.

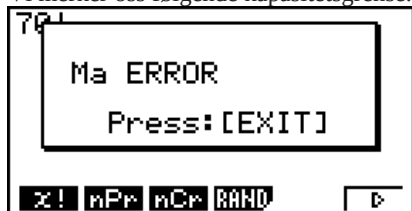


Det største tallet vi kan legge inn.



69! har 99 siffer.

Vi merker oss følgende kapasitetsgrense.



8.2 Tallfunksjonene GCD, LCD, MOD og MOD-E

Lommeregneren er utstyrt med ulike tallfunksjoner som

GCD (a, b) (greatest common divisor of a and b)
 største felles mål (divisor) for a og b

LCM (a, b) (least common multiple of a and b)
 minste felles multiplum for a og b

MOD (a, b) (a modulo b , i.e. the remainder when a is divided by b)
 a modul b , dvs. delingsresten når a blir dividert med b

De engelske forklaringene begrunner forkortelsene.



Finn største felles mål for 234 og 18.

Gå til RUN-MAT i hovedmenyen.



Trykk OPTN og F6.



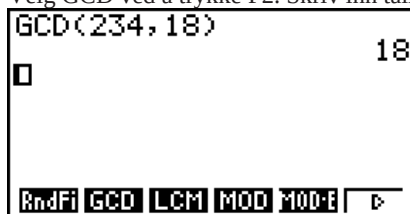
Velg NUM ved å trykke F4.



Trykk F6.



Velg GCD ved å trykke F2. Skriv inn tallene.



18 er største felles mål (divisor) for 234 og 18.



Finn minste felles multiplum for 234 og 180.

Skjerm.



2340 er minste felles multiplum for 234 og 18.



Finn delingsresten når 234 blir dividert med 180.

Uten bruk av MOD må vi utføre følgende utregning.

234÷180	1.3
0.3×180	54
□	
JUMP DEL ▶MAT MATH	

Med bruk av MOD.

MOD(234,180)	54
□	
RndFi GCD LCM MOD MOD-E ▶	

Delingsresten er altså 54.



Finn fellesnevneren til brøkene $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ og $\frac{37}{42}$.

Skjerm.

LCM(6,3,4,42)	84
□	
RndFi GCD LCM MOD MOD-E ▶	

Fellesnever er 84.



Finn delingsresten i regnestykket $8^3 : 5 =$

Uten bruk av MOD-E må vi utføre følgende utregning.

$8^3 \div 5$	102.4
0.4×5	2
□	
JUMP DEL ▶MAT MATH	

Med bruk av MOD-E.

MOD_Exp(8,3,5)	2
□	
RndFi GCD LCM MOD MOD-E ▶	

8.3 Komplekse tall



Finn realdelen og imaginærdelen til det komplekse tallet $3+4i$.

Trykk OPTN.



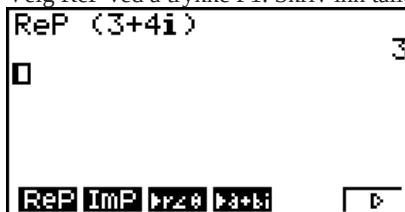
Velg CPLX ved å trykke F3.



Trykk F6.

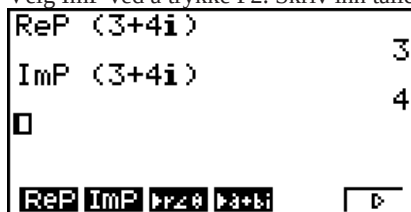


Velg ReP ved å trykke F1. Skriv inn tallet.



Realdelen er 3.

Velg ImP ved å trykke F2. Skriv inn tallet.

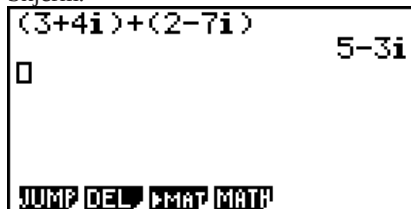


Imaginærdelen er 4.



Regn ut: $(3+4i)+(2-7i)$.

Skjerm.



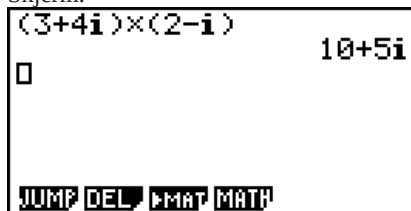
Generelt gjelder:

$$(a + bi) \cdot (c + di) = a + c + (b + d)i$$



Regn ut: $(3 + 4i) \cdot (2 - 5i)$

Skjerm.



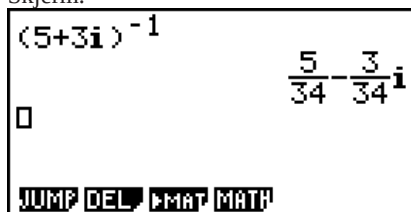
Den inverse verdien av det komplekse tallet $(a + bi)$ skriver vi som $(a + bi)^{-1}$.

Følgende regneregel gjelder: $(a + bi)^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$



Verifiser regneregelen ovenfor ved å regne ut $(5 + 3i)^{-1}$.

Skjerm.

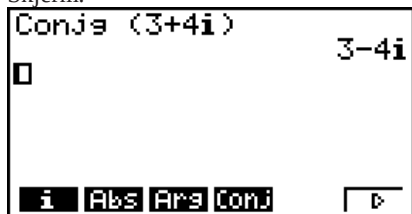


Sett $a = 5$ og $b = 3$ og kontroller selv.



Finn den konjugerte til $3 + 4i$

Skjerm.



Ekspеримenter med et komplekst tall og den konjugerte. Hvilke regneregler for sum, differanse, multiplikasjon og divisjon kan du verifisere på lommeregneren?

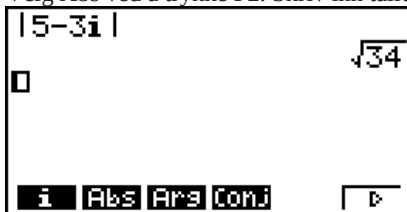


Finn absoluttverdien til $5 - 3i$.

Trykk OPTN og CPLX.



Velg Abs ved å trykke F2. Skriv inn tallet.

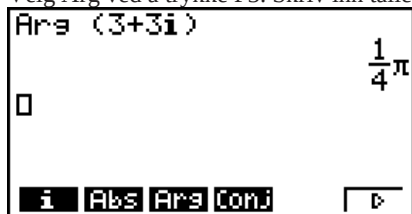


Hvilken regneregler ser ut til å gjelde?



Finn argumentet til $3 + 3i$.

Velg Arg ved å trykke F3. Skriv inn tallet.



Lommeregneren er i RAD-mode.

Hvorfor blir argumentet $\frac{\pi}{4}$ i dette tilfellet?

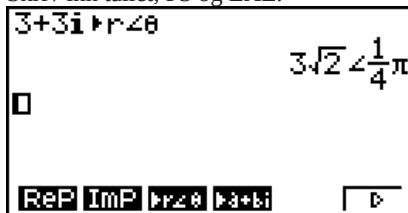


Skriv det komplekse tallet $3 + 3i$ på eksponentiell form.

Trykk OPTN, CPLX, F6.



Skriv inn tallet, F3 og EXE.

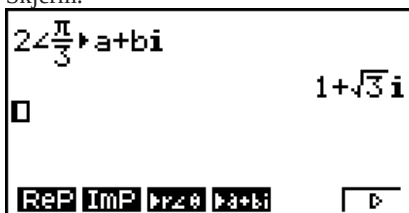


På eksponentiell form: $3\sqrt{2} \cdot e^{\frac{i\pi}{4}}$.



Skriv det komplekse tallet $2 \cdot e^{\frac{\pi i}{3}}$ på formen $a+bi$.

Skjerm.

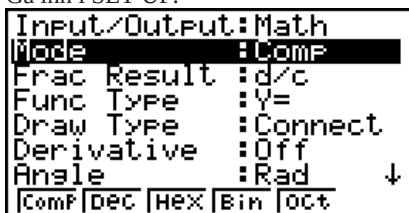


8.4 Binære og heksadesimale tall

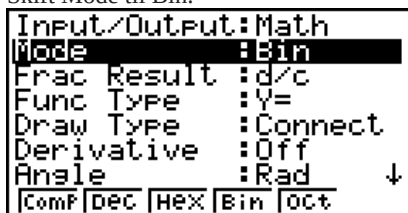


Gjør om det binære tallet 1101011 til desimalt tall.

Gå inn i SET UP.



Skift Mode til Bin.



Trykk EXIT. Skriv inn det binære tallet.



Velg DISP ved å trykke F3. Trykk så F1.



Når vi har valgt Bin-Mode kan vi skrive d foran et tall for å uttrykke at vi skriver et tall på desimal form.



Trykk F1. og skriv d107.



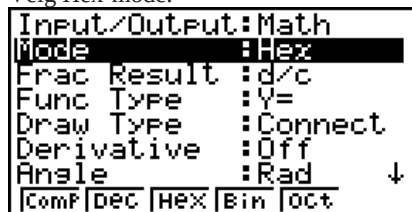
Her ser vi at 107_{10} er gjort om til 1101011_2



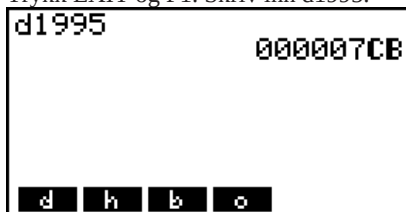
Vis på lommeregneren at det heksadesimale tallet $7CB_{16}$ er lik 1995_{10}

Vi velger å gjøre om det desimale tallet 1995 til heksadesimal form.

Velg Hex-mode.



Trykk EXIT og F1. Skriv inn d1995.



Du kan utføre addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon i de ulike tallsystemene. Øv selv.

9. Omgjøring av enheter

9.1 Lengde, areal og volumenheter



Gjør om til meter.

- a) 2,54 cm
- b) 1 mile

a)

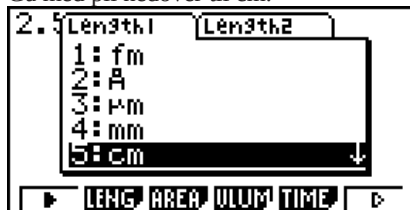
Velg RUN-MAT i hovedmenyen. Trykk OPTN og F6.



Velg CONV ved å trykke F1.



Skriv inn 2,54. Velg LENG ved å trykke F2. Gå med pil nedover til cm.



Trykk EXE.



Trykk F1.



Velg LENG ved å trykke F2. Gå med pil nedover til m.



Trykk EXE to ganger.



Svar: 2,54 cm = 0,0254 m.

b)
Skriv inn 1. Velg LENG. Gå med pil mot høyre til Length 2. Gå med pil nedover til mile.



Trykk EXE og F1.



Velg LENG, Length1 og m for meter.



Skjerm.



Svar: 1 mile = 1609,344 m

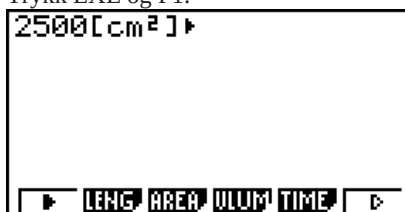


Gjør om 2500 cm² til m².

Skriv inn 2500. Velg AREA og cm².



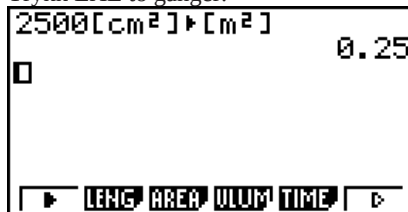
Trykk EXE og F1.



Velg AREA og gå med pil til m^2 .



Trykk EXE to ganger.



Svar: $2500 \text{ cm}^2 = 0,25 \text{ m}^2$.



Gjør om 1 amerikansk gallon til liter.

Velg VLUM. Ellers er framgangsmåten den samme som ovenfor.



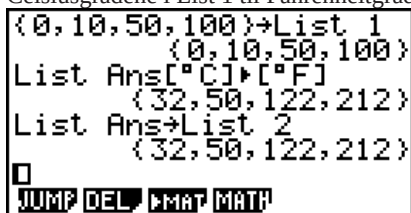
Svar: 1 gal = 3,785 liter

9.2 Omgjøringsformel for Fahrenheit og Celsius



Bruk lommeregneren til å bestemme en formel for omgjøring fra Celsius til Fahrenheit.

Gå til RUN-MAT. Legg inn noen grader Celsius i List 1. Bruk CONV til å konvertere Celsiusgradene i List 1 til Fahrenheitgrader. Legg så Fahrenheitgradene i List 2.



Det er viktig å lære seg å arbeide med lister på denne måten.

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	0	32		
2	10	50		
3	50	122		
4	100	212		

GRAPH CALC TEST INTR DIST

Listene kan også gis navn.

Velg CALC, REG, X og $ax+b$.

```
LinearReg(ax+b)
a =1.8
b =32
r =1
r^2=1
MSe=0
y=ax+b
```

Altså: Svar: $F = 1,8 \cdot C + 32$ eller $F = \frac{9}{5} \cdot C + 32$

Prøv selv å bestemme formelen for omgjøring fra Fahrenheit til Celsius. Den skal bli:

$$C = (F - 32) \cdot \frac{5}{9}$$

9.3 Tidsenheter



Hvor mange sekunder er det i en uke?

Gå til CONV. Legg inn 1.

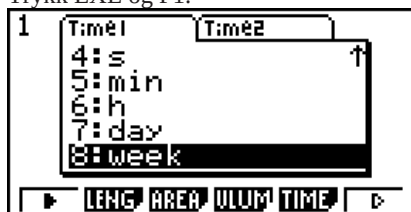
1

▶	LENG	AREA	VOLUM	TIME	◀
---	------	------	-------	------	---

Velg TIME. Bruk pil nedover til å gå til week.

1 Time1 Time2
4:s
5:min
6:h
7:day
8:week
► LENG AREA VOLUM TIME ►

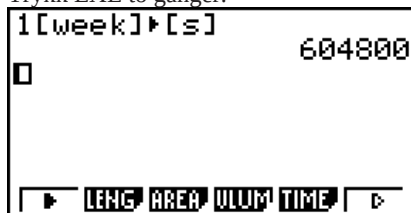
Trykk EXE og F1.



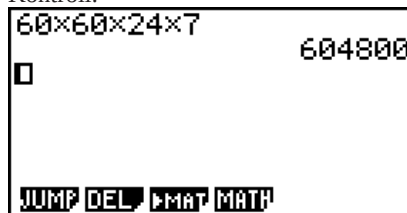
Marker s.



Trykk EXE to ganger.



Kontroll.

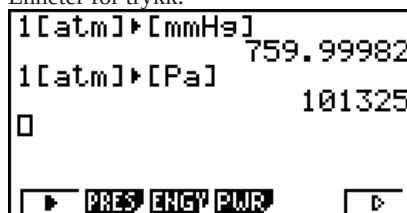


9.4 Kraft, trykk, energi og effekt

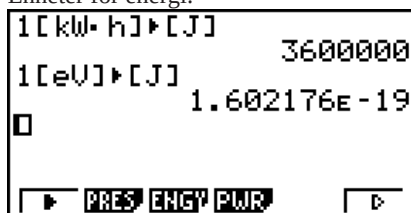
Enheter for kraft.



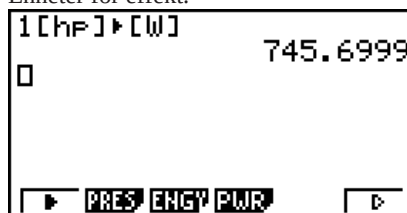
Enheter for trykk.



Enheter for energi.



Enheter for effekt.



Merknad:

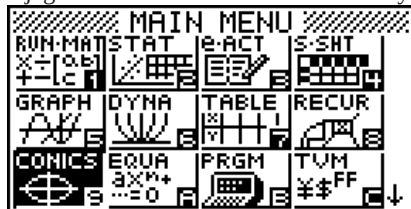
Legg merke til at lommeregneren konverterer *mechanical horsepower* til watt. Vi bruker den metriske hestekraften som gir:

$$1 \text{ hp} = 735,5 \text{ W}$$

10. Kjeglesnitt

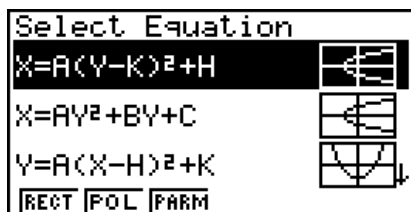
10.1 Sirkelen

Kjeglesnitt kalles CONICS i hovedmenyen.

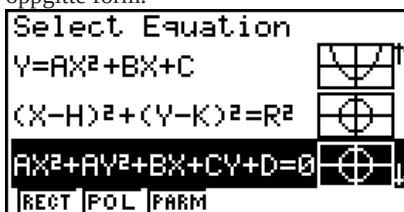


- Tegn sirkelen gitt ved $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 11 = 0$
- Bestem sentrum og radius.

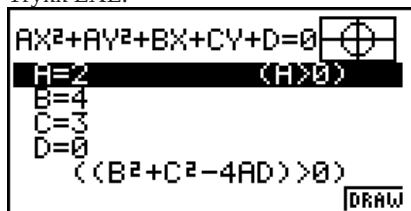
- Velg CONICS i hovedmenyen.



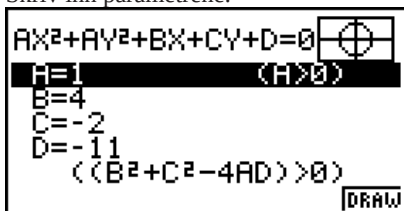
Bruk pil nedover til du kommer til sirkel på den oppgitte form.



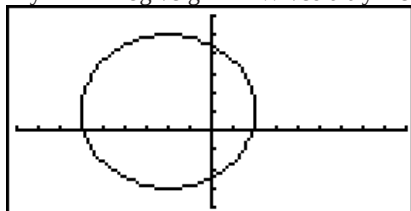
Trykk EXE.



Skriv inn parametrene.



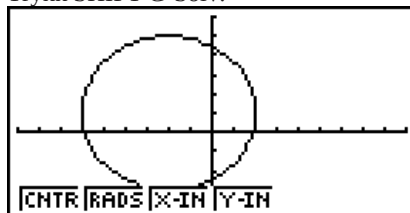
Trykk EXE og velg DRAW ved å trykke F6.



Det kan tenkes at vi må justere vinduet.

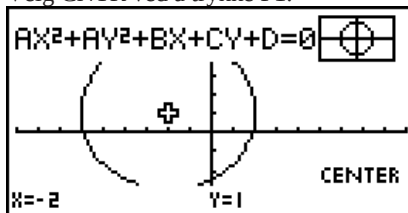
b)

Trykk SHIFT G-Solv.

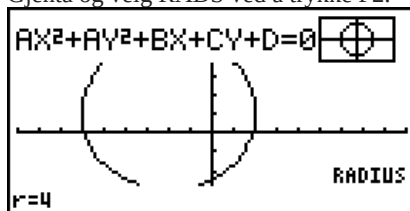


Sirkelen har sentrum i $(-2, 1)$.

Velg CNTR ved å trykke F1.



Gjenta og velg RADS ved å trykke F2.



Sirkelen har radius 4.

10.2 Parabel

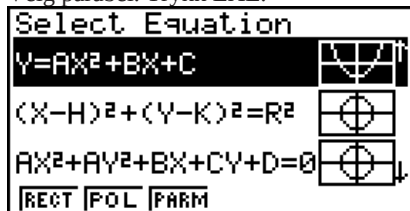


a) Tegn parabelen gitt ved $y = x^2 - 2x - 1$

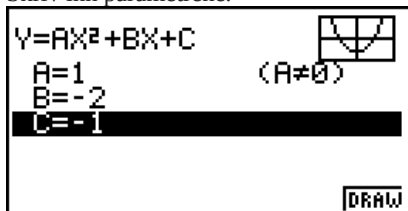
b) Bestem brennpunktet, symmetrilinjen, styrelinjen og toppunktet.

a)

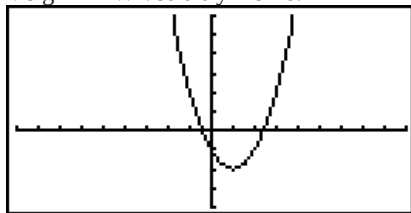
Velg parabel. Trykk EXE.



Skriv inn parametrene.

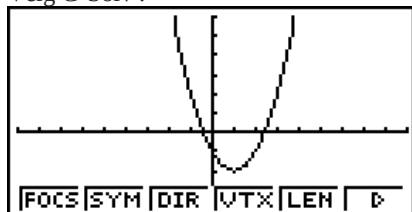


Velg DRAW ved å trykke F6.

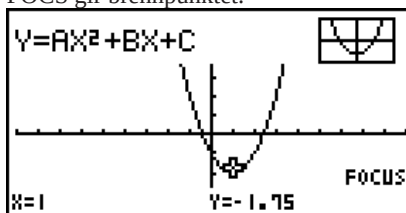


b)

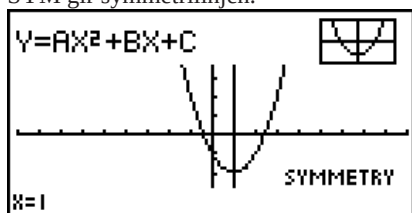
Velg G-Solv .



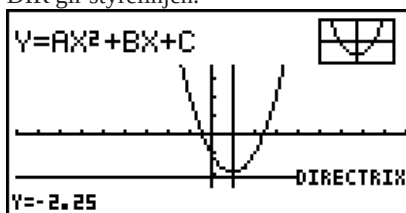
FOCS gir brennpunktet.



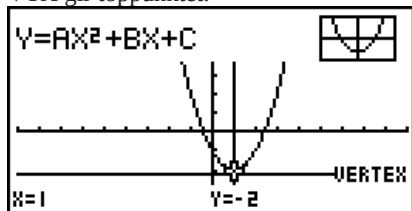
SYM gir symmetrilinjen.



DIR gir styrelinjen.



VTX gir toppunktet.



10.3 Ellipse

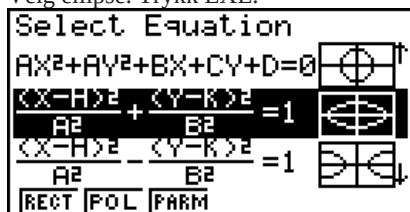


a) Tegn ellipsen gitt ved $\frac{(x+1)^2}{1} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$

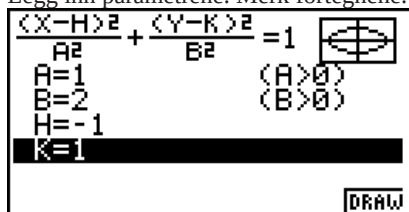
b) Bestem brennpunkt, skjæring med x-aksen og med y-aksen.

a)

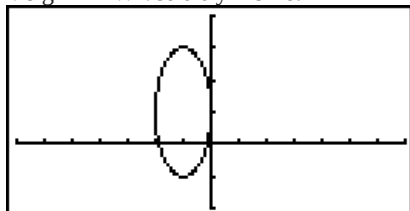
Velg ellipse. Trykk EXE.



Legg inn parametrene. Merk fortegnene.

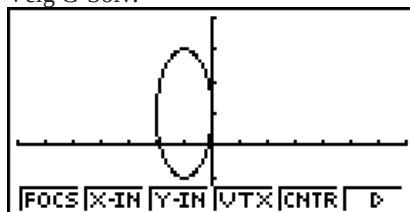


Velg DRAW ved å trykke F6.

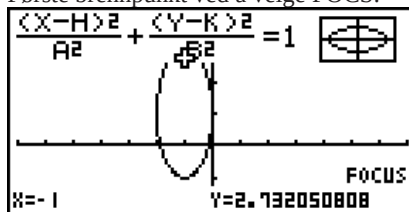


b)

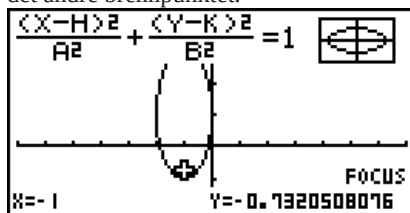
Velg G-Solv.



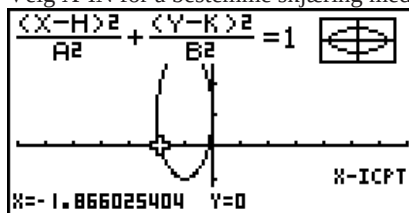
Første brennpunkt ved å velge FOCS.



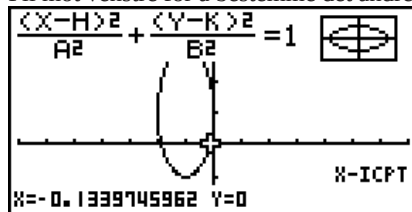
Pil ned eller mot venstre for å bestemme det andre brennpunktet.



Velg X-IN for å bestemme skjæring med x-aksen.



Pil mot venstre for å bestemme det andre skjæringspunktet.



Y-IN gir skjæringspunktene med y-aksen. Prøv selv.

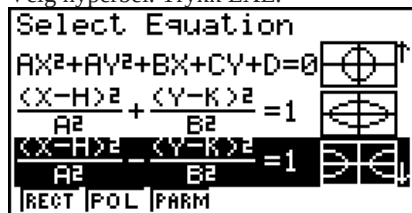
10.4 Hyperbel



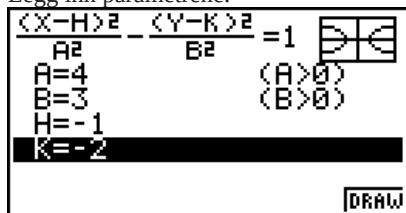
a) Tegn hyperbelen gitt ved $\frac{(x+1)^2}{1} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$

b) Bestem brennpunkt og stigningstallet til asymptotene.

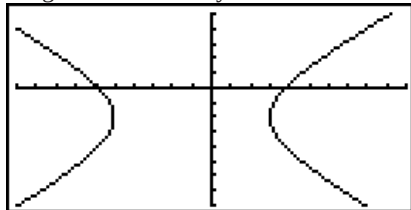
Velg hyperbel. Trykk EXE.



Legg inn parametrene.

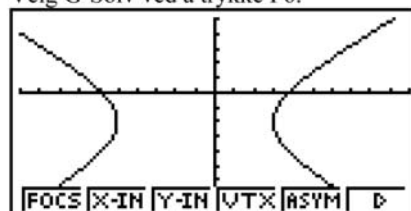


Velg DRAW ved å trykke F6.

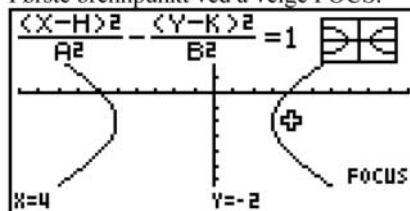


b)

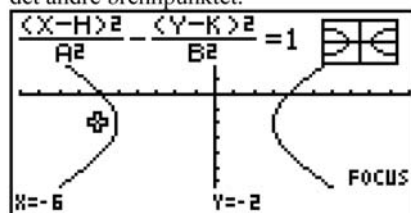
Velg G-Solv ved å trykke F6.



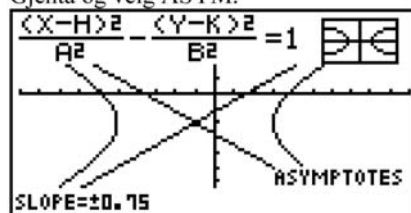
Første brennpunkt ved å velge FOCS.



Pil ned eller mot venstre for å bestemme det andre brennpunktet.



Gjenta og velg ASYM.



Asymptotene har stigningstall $\pm \frac{3}{4}$.

Prøv selv å finne koordinatene til andre viktige punkt på denne hyperbelen.

Kjeglesnitt kan også tegnes ved hjelp av polarkoordinater og parameterfunksjoner.



Den nye ClassPad 330:

Med mer i seg enn
bare veien til det
rette svaret.

ClassPad 330

Stor LCD skjerm med
pennbasert inntasting

Virtuelt tastatur

Naturlig matematisk notasjon

E-aktivitet for elektroniske tekst problemer

Dynamisk geometri

3-D grafer

Levert med USB cable



CASIO.

Casio Scandinavia AS

Hillerenveien 72, 5174 Mathopen

Telefon: 55 19 79 90

E-mail: info@casio.no

www.casio.no

RING VÅR SUPPORT-TELEFON

992 12 396